УДК 654.1

УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ НА ПРЕДОСТАВЛЯЕМЫЕ УСЛУГИ ПРЕДПРИЯТИЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ ОТРАСЛИ

И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова

Для описания динамики поведения абонентской базы предприятий телекоммуникационной отрасли принята логистическая модель Лотки—Вольтерра с запаздыванием по времени. Рассмотрена задача идентификации параметров модели на основе реальных данных абонентской базы и тарифной политики операторов сотовой связи. Численно решена задача оптимального управления поведением предприятий на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием.

Ключевые слова: динамическая модель, оптимальное управление, сотовая связь, оператор, тарифная политика.

ВВЕДЕНИЕ

Рынок телекоммуникационных услуг характеризуется внедрением информационных технологий во многие сферы деятельности отраслей, ведомств, корпораций, отдельных предприятий и пользователей. В течение последнего десятилетия телекоммуникационная отрасль в России развивается стремительными темпами. По данным консалтинговой компании J&P, Российский рынок информационных технологий в 2010 г. удвоился, а к 2015 г. вырастет более чем в 4 раза. Увеличивается число абонентов различных видов связи и пользователей Интернета, расширяется спектр современных услуг связи. Причин, обусловливающих такой рост, можно выделить несколько: высокие капиталовложения сотовых операторов, позволяющие играть «эффектом масштаба» на фоне снижающихся цен поставщиков оборудования, что позволило обеспечить расширение зоны покрытия и повысить качество предоставляемых услуг; проводимые массированные рекламные акции; снижение тарифов; низкая степень развития фиксированной связи; дополнительные сервисы.

Бурно развивающийся рынок услуг сотовой связи привлекает внимание многих компаний, и каждая стремится быстрее окупить свои затраты и получить прибыль. Конкуренция между компаниями ведется за потенциального клиента, которого интересует как качество обслуживания — надежность связи, так и зона охвата данной сотовой сети, ассортимент и стоимость дополнительных услуг, возможность пользоваться мобильным телефоном в поездках по России или за границу и т. д. Появление большого числа участников на телекоммуникационном рынке неизбежно приводит к усилению конкуренции, а та, в свою очередь, приводит к уменьшению трафика у каждого из операторов связи. Поэтому весьма актуальна задача разработки эффективного механизма управления стратегией развития предприятий телекоммуникационной отрасли в условиях конкурентной борьбы за общие ресурсы (в данном случае, за пользователей услуг).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕДЕНИЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ ОТРАСЛИ

Для построения математической модели управления поведением предприятий телекоммуникационной отрасли в условиях конкурентной борьбы за общие ресурсы рассмотрим n конкурирующих фирм, предоставляющих услуги сотовой связи, которые существуют в одной экономической нише, т. е. с общими трудовыми и природными ресурсами и общими потребителями сотовой связи (абонентами). Предположим, что рассматриваемые фирмы не являются монополистами и что услуга незамещаема.

Обозначим через $x_i(t)$ — усредненное значение числа абонентов i-го оператора сотовой связи в момент времени t. Принимая во внимание эффект насыщения на рынке, где услуги сотовой связи продаются, предположим, что в отсутствии конкурентов число абонентов i-й фирмы растет экспоненциально с коэффициентом прироста $\varepsilon_i > 0$. Необходимо также учесть и наличие конкурентов на рынке сотовой связи, развивающихся с подобной динамикой. Поскольку, кроме естественного прироста, следует учесть и убыль числа абонентов в силу влияния конкурирующих фирм, общая динамика абонентов i-го оператора сотовой связи в момент времени t может быть выражена следующей системой уравнений

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}x_k(t)\right], \quad i = 1, ..., n, \quad (1)$$

где γ_{ik}, $k = 1, ..., n$ — коэффициент взаимного влияния i-го и k-го предприятий, предоставляющих услуги сотовой связи.

Отметим, что система уравнений (1) не отражает объективной реальности, так как динамические переменные $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, учитываются в модели в один и тот же момент времени t. В действительности, необходимо учесть временной лаг $\tau > 0$, который представляет собой разность по времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений в целях реагирования на эти изменения. Поэтому для описания динамики поведения абонентской базы операторов сотовой связи воспользуемся логистической моделью Лотки—Вольтерра с запаздыванием во времени:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}x_k(t-\tau)\right], \quad i = 1, ..., n.$$

Субъективизм при выборе модели данного типа основан на фактах, которые необходимо учесть при моделировании конкурентоспособности предприятий, в том числе нелинейность и наличие временного лага при функционировании участников рынка. В данной задаче основное нелинейное свойство состоит в эффекте насыщения рынка: потребителей сотовой связи не станет больше определенного числа, даже если услуги сотовой связи станут дешевле. Так, время реакции на изменение условий спроса (т. е. изменение числа пользователей услуг сотовой связи) или на изменение поведения конкурентов (например, предоставление новых видов услуг или внедрение современных технологий) может быть продолжительным, поскольку требуются затраты времени и капитала для реализации новшеств на рынке.

Для моделирования процесса управления поведением предприятия сотовой связи воспользуемся показателем $u_i(t)$, $i = 1, ..., n$, характеризующем среднюю стоимость минуты пользования услугами связи оператора в момент времени t и удовлетворяющем ограничению

$$\alpha_i \le u_i(t) \le \beta_i, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где α_i — минимальная средняя стоимость минуты связи, при которой затраты на издержки не превысят выручку, получаемую от предоставления услуг сотовой связи (себестоимость минуты связи); β_i — максимальная средняя стоимость минуты связи, позволяющая оператору оставаться конкурентоспособным на рынке.

Тогда система уравнений, описывающая динамику изменения абонентской базы операторов сотовой связи, с учетом влияния средней стоимости минуты на прирост числа абонентов, примет вид

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}x_k(t)\right] - p_iu_i(t), \quad i = 1, ..., n,$$

где p_i — коэффициент влияния средней стоимости минуты связи на прирост числа абонентов, а число абонентов i-го оператора сотовой связи на начальном интервале $[-\tau, 0]$ задано функциями $\varphi_i(t)$, $i = 1, ..., n$:

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, ..., n. \quad (3)$$

Также необходимо учесть существование нижней грани объема абонентской базы, которая обеспечивает нормальное функционирование предприятия:

$$x_i(t) \ge \eta_i, \quad i = 1, ..., n. \quad (4)$$

Российская телекоммуникационная отрасль включает в себя две укрупненные группы компаний: компании фиксированной связи и компании сотовой связи. Данная классификация по функциональному признаку довольно неточна, поскольку многие компании занимаются предоставлением услуг в каждой группе, но предложенное разделение позволяет достаточно полно раскрыть тенденции в отрасли и провести максимально точный анализ. Для дальнейшего построения модели оптимального управления поведением предприятий телекоммуникационной отрасли разделим всех операторов на две неравные группы: фирму № 1 (обособив одно из ведущих предприятий рассматриваемой отрасли на рынке) и фирму № 2 (все остальные предприятия). Для анализа воспользуемся данными абонентской базы и данными тарифной политики операторов сотовой связи, которые ежеквартально публикуются в финансовой отчетности.

Введем в рассмотрение двух экономических агентов: фирму № 1 с абонентской базой $x_1(t)$ и фирму № 2 — все остальные предприятия, предоставляющие услуги связи, с общим числом абонентов $x_2(t)$ [1]. Согласно сделанным ранее предположениям их общая динамика может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \gamma_{12}x_2(t-\tau)] - p_1u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \gamma_{22}x_2(t-\tau)] - p_2u_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

где ε_i, γ_{ik}, p_i, i, $k = 1, 2$ — неизвестные коэффициенты модели, τ — запаздывание, которое также неизвестно, $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — средняя стоимость минуты связи фирм № 1 и № 2 в момент времени t соответственно.

Для оценки параметров модели преобразуем систему (5) в интегральную форму

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0)\exp\Bigg[\int\limits_0^t(\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(s-\tau) - \\ \qquad - \gamma_{12}x_2(s-\tau) - p_1u_1(s)x_1^{-1}(s))ds\Bigg], \\ x_2(t) = x_2(0)\exp\Bigg[\int\limits_0^t(\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(s-\tau) - \\ \qquad - \gamma_{22}x_2(s-\tau) - p_2u_2(s)x_2^{-1}(s))ds\Bigg]. \end{cases} \quad (6)$$

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ БЕЗ УЧЕТА ВРЕМЕННОГО ЛАГА

Для демонстрации важности введения временного лага рассмотрим случай без учета запаздывания, т. е. когда $\tau = 0$.

Преобразуем систему уравнений (6) в систему нелинейных разностных уравнений с неизвестными коэффициентами, которые можно определить методом наименьших квадратов (МНК)

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \times \\ \times \exp[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(k) - \gamma_{21}x_2(k) - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k)], \\ x_2(k+1) = x_2(k) \times \\ \times \exp[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(k) - \gamma_{22}x_2(k) - p_2u_2(k)x_2^{-1}(k)]. \end{cases}$$

Для идентификации модели воспользуемся только частью данных (с 1 по 21 квартал включительно), а на остальных данных (интервалом в 1 год, т. е. с 22 по 25 квартал рассматриваемого периода) проверим модель на адекватность. В результате идентификации получим модель с коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[0,30355 - 0,004x_1(t) - 0,00146x_2(t)] - \\ \qquad - 0,85525u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[0,20528 + 0,00380x_1(t) - 0,00336x_2(t)] - \\ \qquad - 0,67325u_2(t). \end{cases}$$

Графики реальных кривых и модельных приведены на рис. 1.

Отметим, что отклонение прогнозных оценок от фактических данных абонентской базы фирмы № 1 и ее конкурентов составляет 4,03 и 4,43 % соответственно.

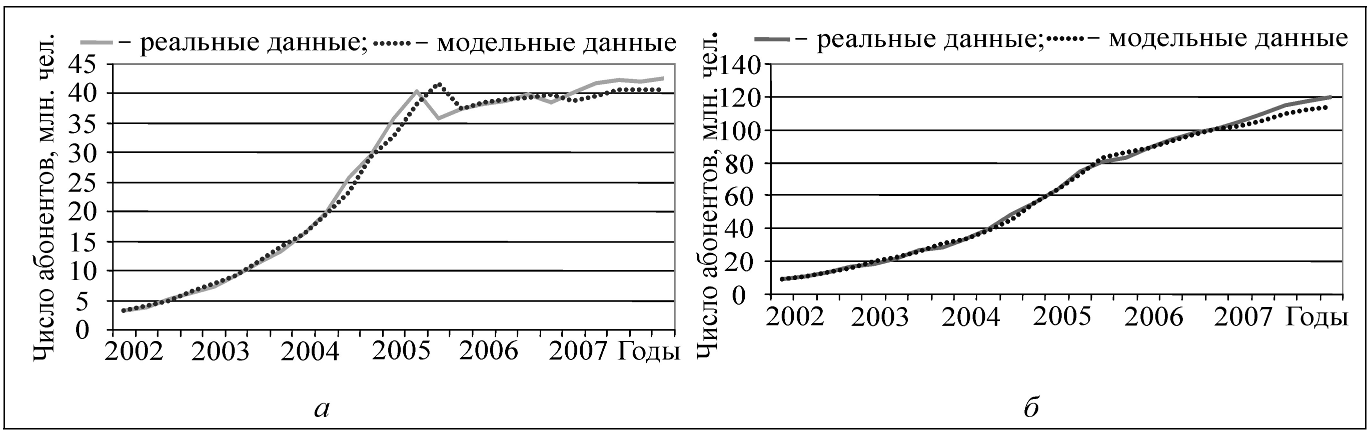

Рис. 1. Результат моделирования для квартального объема абонентской базы (без учета временного лага):
а — фирма № 1; *б* — ее конкуренты

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННОГО ЛАГА

Введем в рассмотрение запаздывание, связанное с разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и принятием управленческих решений. Предположим, что единица его измерения — квартал, следовательно, значение τ — целое число.

Аналогично предыдущим рассуждениям, из системы уравнений (6) при $\tau \neq 0$ получим систему нелинейных разностных уравнений с временным лагом, параметры которых (размер лага и коэффициенты модели) неизвестны:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\exp\Big[\varepsilon_1 - \gamma_{11}\dfrac{x_1(k+1-\tau)+x_1(k-\tau)}{2} - \\ \qquad - \gamma_{21}\dfrac{x_2(k+1-\tau)+x_2(k-\tau)}{2} - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k)\Big], \\ x_2(k+1) = x_2(k)\exp\Big[\varepsilon_2 - \gamma_{21}\dfrac{x_1(k+1-\tau)+x_1(k-\tau)}{2} - \\ \qquad - \gamma_{22}\dfrac{x_2(k+1-\tau)+x_2(k-\tau)}{2} - p_2u_2x_2^{-1}(k)\Big]. \end{cases}$$

Коэффициенты входят в систему линейно, поэтому для их вычисления также воспользуемся методом наименьших квадратов при различных значениях τ, τ = 1, ..., 19. После применения МНК оптимальные коэффициенты становятся функциями τ: $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\tau)$, $\gamma_{ik} = \gamma_{ik}(\tau)$, $p_i = p_i(\tau)$, i, k = 1, 2.

В результате расчетов и численных экспериментов окончательно считаем оптимальным — лаг, равный 3 кварталам, и модель с оптимальными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[0{,}28121 - 0{,}01242x_1(t-3) + \\ \qquad + 0{,}00241x_2(t-3)] - 2{,}49952u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[0{,}19267 - 0{,}00166x_1(t-3) - \\ \qquad - 0{,}00104x_2(t-3)] - 2{,}05483u_2, \end{cases} \tag{7}$$

где единица измерения шкалы времени один квартал [1].

Графики на рис. 2 демонстрируют расположение модельной кривой среди реальных данных. Отклонение прогнозных оценок от фактических данных абонентской базы фирмы № 1 и ее конкурентов составляет 2,49 и 1,38 % соответственно.

С экономической точки зрения полученный результат можно интерпретировать следующим образом:

— коэффициент ε_1 прироста числа абонентов фирмы № 1 без учета эффекта насыщения больше соответствующего коэффициента ε_2 ее конкурентов: это значит, что абонентская база фирмы № 1 наращивает объемы быстрее, чем абонентская база других операторов сотовой связи;

— временной лаг составляет три квартала: такая задержка в реакции соответствует времени изменения качества предоставляемых услуг сотовой связи, способного изменить конкурентную ситуацию на рынке. Очевидно, что различные операторы сотовой связи вводят качественные изменения в предоставляемые услуги за разное время, но в данном случае взят средний статистический срок.

Введение временного лага привносит новую динамику по сравнению с моделью без лагов. Так,

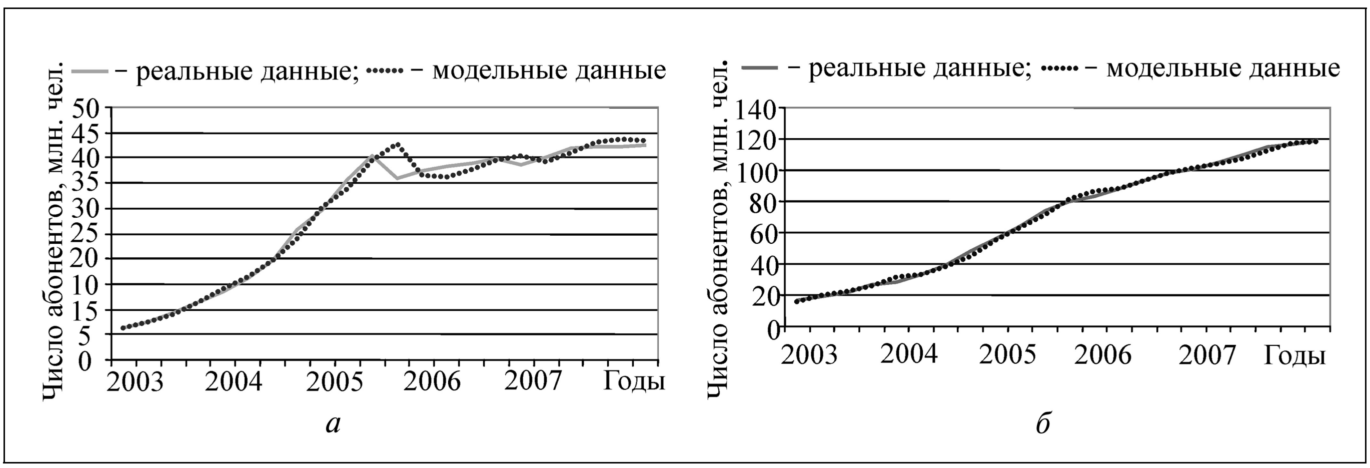

Рис. 2. Результат моделирования для квартального объема абонентской базы:
а — фирма № 1; *б* — ее конкуренты

например, для фирмы № 1 среднеквадратическое отклонение прогнозных оценок от фактической реализации состояния системы без учета временного лага за один год составляет 4,03 %, а при введении временного запаздывания, равного трем кварталам, отклонение снижается до 2,49 %. Полученный результат свидетельствует о том, что введение запаздывания не только естественно, но и существенно дополняет модель управления поведением предприятия сотовой связи.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перейдем к решению задачи оптимального управления, которая состоит в оптимизации тарифной политики фирмы № 1 для обеспечения выполнения плана развития абонентской базы в условиях конкуренции на рынке предоставляемых услуг [2]. Данная задача может быть представлена в следующем виде.

Необходимо найти такую тарифную политику $\bar{u}_1(t)$, $t \in [0, T)$ фирмы № 1, которая при динамических ограничениях (7) доставляла бы минимум функционалу

$$J(u_1) = (M - x_1(T))^2 + \int_0^T (r(t) - x_1(t))^2 Q dt \to \min, \quad (8)$$

где M — плановый уровень объема абонентской базы фирмы № 1 в конечный момент времени T, $r(t) \ge x_1(t)$, $t \in [0, T)$ — плановая траектория изменения фазового вектора фирмы № 1 с учетом запаса, гарантирующего выполнение плана и определяемого исхода из практики планирования на предприятии, Q — средний уровень расходов одного абонента фирмы № 1 за пользование услугами связи. Будем считать, что значение $u_2 = \text{const}$, которое может быть оценено из динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка.

Применим принцип максимума Понтрягина для системы с постоянным запаздыванием к решению поставленной задачи [3]. Для этого построим функцию Понтрягина

$$H(t, x, y, u_1, \psi, \lambda_0) = -\lambda_0(r - x_1)^2 Q + \psi_1(\varepsilon_1 x_1 - \gamma_{11}x_1y_1 - \gamma_{12}x_1y_2 - p_1u_1) + \psi_2(\varepsilon_2 x_2 - \gamma_{21}x_2y_1 - \gamma_{22}x_2y_2 - p_2u_2),$$

где $y_i = x_i(t - \tau)$, τ — запаздывание.

Пусть $(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t))$ — локально оптимальный процесс в задаче (2)—(5), (8). Тогда с необходимостью существуют множитель $\lambda_0 > 0$ и абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, $t \in [0, T]$ такие, что выполняются следующие условия:

— условие максимума

$$H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1, \psi, \lambda_0) = \max_{u_1 \in U} H(t, \bar{x}, \bar{y}, u_1, \psi, \lambda_0)$$

или

$$\bar{u}_1(t)p_1\psi_1(t) = \min_{\alpha \le u_1 \le \beta} u_1(t)p_1\psi_1(t);$$

— сопряженные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_1}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{11}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{21}\bar{x}_2(t + \tau) - 2\lambda_0 Q(r(t) - \bar{x}_1(t)) - \psi_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_{11}\bar{y}_1(t) - \gamma_{12}\bar{y}_2(t)),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_2}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{12}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{22}\bar{x}_2(t + \tau) - \psi_2(t)(\varepsilon_2 - \gamma_{21}\bar{y}_1(t) - \gamma_{22}\bar{y}_2(t))$$

на отрезке $t_0 \le t \le T - \tau$, и $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0$ на отрезке $T - \tau \le t \le T$;

— условия трансверсальности

$$\psi_1(T) = 2\lambda_0(M - \bar{x}_1(T)), \quad \psi_2(T) = 0;$$

— условия допустимости (2)—(5).

Введем функцию переключения: $-p_1\psi_1 = \rho(t)$. Для нахождения оптимального управления необходимо решить задачу

$$\bar{u}_1(t)[-p_1\psi_1] \to \max_{u_1 \in U},$$

где $U = \{u_1 \in R: \alpha \le u_1 \le \beta, \alpha > 0, \beta > 0\}$.

Решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина весьма затруднительно, поэтому был разработан программный продукт, реализующий ее численное решение. В его основе лежит алгоритм метода проекции градиента, учитывающий штрафные слагаемые [4].

Воспользовавшись программным продуктом, исследуем влияние плановой траектории $r(t)$ развития абонентской базы фирмы № 1 на характер управления $u_1(t)$, в качестве которого мы приняли усредненную стоимость минуты связи данного оператора. И, как следствие, проанализируем влияние управления на прирост числа потребителей услуг фирмы № 1. Для этого смоделируем следующую практическую ситуацию.

В качестве временного интервала T построения оптимального управления, выберем промежуток времени в один год, т. е. четыре квартала, и зададим параметры. Предположим, что число абонентов в начальный момент времени t_0 фирмы № 1 и его конкурентов составляет 1 и 3 млн. чел. соответственно. Минимальный объем абонентской базы η_i, $i = 1, 2$, обеспечивающий нормальное функционирование предприятия, зафиксируем на том же уровне. Минимальное значение средней стоимости минуты связи фирмы № 1 возьмем $\alpha = 0{,}06$ условной единицы (у. е.), максимальное — $\beta = 0{,}07$ у. е., а усредненное значение $u_2 = 0{,}068$ у. е. Исходя из имеющихся данных, средний размер расходов одного абонента фирмы № 1 установим на уровне 12,3 у. е.

Плановую траекторию движения с учетом запаса выберем в виде следующей последовательности векторов: на промежутке до середины второго квартала запланируем прирост абонентской базы фирмы № 1 на 10 тыс. чел. по сравнению с фактической траекторией развития абонентской базы, которая определялась из имеющихся данных о фактическом управлении на рассматриваемом отрезке времени. С середины до конца второго квартала — на 50 тыс. чел. До конца третьего квартала увеличим прирост в объеме, равном 100 тыс. чел. Поскольку в реальной ситуации может возникнуть проблема перегруженности сотовой связи, на интервале с третьего по четвертый квартал уменьшим плановый прирост до 80 тыс. чел.

В результате работы программы получим, что с первого квартала рассматриваемого периода алгоритм предполагает снижение стоимости минуты связи и минимально возможное значение (0,05 у. е.) фиксирует с середины третьего квартала. Далее алгоритм предполагает повышение стоимости минуты связи, и к концу четвертого квартала она достигает максимального размера (0,07 у. е.).

Следствие оптимального управления — существенный рост числа потребителей услуг фирмы № 1. В таблице приведены значения планируемого прироста абонентов фирмы № 1 и полученные в результате оптимального управления.

Сравнение прироста абонентской базы по плану и полученного в результате оптимальной тарифной политики

Отрезок времени, квартал	Прирост абонентской базы, тыс. чел.	
	по плану	получили
[0; 1, 5]	10	23
(1, 5; 2]	50	52
(2; 3]	100	80
(3; 4]	80	87

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания поведения предприятий сотовой связи предложена модель на основе моделей Лотки — Вольтерра с запаздыванием, идентификация параметров которой позволяет рассматривать различные сценарии поведения предприятий на рынке и находить оптимальные управленческие решения.

Важно отметить, что повышение эффективности управления поведением предприятий телекоммуникационной отрасли в условиях конкуренции на рынке предоставляемых услуг, а также точность моделирования, прогнозирования, оценивания потенциальной емкости рынка напрямую зависят от уточнения параметров модели при поступлении новой информации об абонентской базе и тарифной политике операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прасолов А.В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. — СПб.: Лань, 2010. — 192 с.
2. *Коблов А.И., Ширяев В.И.* Оптимальное управление поведением фирмы на примере рынка сотовой связи // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 157—165.
3. *Болодурина И.П.* Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и их приложения: учебное пособие. — Оренбург: Оренбург. гос. ун-т, 2006. — 101 с.
4. *Андреева Е.А., Цирулева В.М.* Вариационное исчисление и методы оптимизации. — Оренбург-Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004. — 575 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Болодурина Ирина Павловна — д-р техн. наук, зав. кафедрой, ✉ prmat@mail.osu.ru,

Огурцова Татьяна Александровна — аспирант, ✉ ogurechnaya80@mail.ru,

Оренбургский государственный университет, ☎ (3532) 37-25-36.