

АВТОМАТИЧЕСКИЙ ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ НАСТРОЕК ПИ- И ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

Н.М. Бобриков, И.К. Денисов, С.И. Кузнецов, А.М. Шубладзе

Предложена процедура автоматического поиска оптимальных по критерию максимальной степени устойчивости настроек регуляторов и соответствующих им структур, определяемых крайними правыми корнями соответствующих характеристических полиномов при ПИ- и ПИД-законах управления, исходя из полученных ранее структур оптимальных в указанном смысле решений. Показана возможность решения рассматриваемой задачи в различных случаях до предельных структур.

Ключевые слова: автоматический поиск, системы максимальной степени устойчивости, оптимальные по степени устойчивости решения.

ВВЕДЕНИЕ

Один из возможных способов итерационного поиска оптимальных по степени устойчивости решений рассматриваемых задач основан на методе *D*-разбиения, предложенном Ю.И. Неймарком [1, 2] и развитом в работах [3, 4]. В соответствии с этим способом в пространстве настраиваемых параметров регулятора может быть выделена область, которой соответствуют характеристические полиномы замкнутой системы управления, не имеющие корней в правой полуплоскости комплексной плоскости. С помощью итерационных процедур сравнительно просто эта область сжимается в точку, и для нее определяются значения максимальной степени устойчивости и оптимальных настраиваемых параметров регулятора. Наиболее эффективно метод работает в случае двух настраиваемых параметров и значительно усложняется при наличии трех и более таких параметров.

В настоящей статье на основе опубликованных в работах [5–9] результатов по анализу годографов Михайлова оптимальных по степени устойчивости систем управления предлагается итерационный способ автоматического поиска оптимальных настроек, значения максимальной степени устойчивости и крайних правых корней характеристических полиномов при ПИ- и ПИД-законах управления.

Анализ годографа Михайлова дает возможность сдвигом мнимой оси комплексной плоскости корней для любых начальных настроек регуляторов найти размер такого сдвига, при котором один или несколько крайних правых корней имеют нулевую действительную часть. Этот размер сдвига является степенью устойчивости системы управления, зависящей от начальных настроек. Варьируя определенным образом настройки регуляторов, можно увеличивать степень устойчивости системы. В тех случаях, когда ни при каких вариациях параметров не удастся повысить степень устойчивости системы, имеет место максимальная степень устойчивости. Такой степени устойчивости соответствует один из случаев, описанных в работах [5–9].

Задача автоматического поиска максимальной степени устойчивости и соответствующих ей оптимальных настроек ПИ- и ПИД-регуляторов будет решаться для систем управления, в которых связь между выходным сигналом $x(t)$ объекта и управляющим сигналом $u(t)$ определяется уравнением

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i x^{(i-1)}(t) = k_0 u(t), \quad (1)$$

где $x^{(n)}(t)$, $i = 0, \dots, n$, $n \geq 3$ — фазовые координаты, a_i и k_0 — параметры объекта управления.



При ПИ управлении

$$u(t) = u_{ПИ}(t) = k_{П}\varepsilon(t) + k_{И}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau, \quad (2)$$

при ПИД управлении

$$u(t) = u_{ПИД}(t) = k_{П}\varepsilon(t) + k_{И}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau + k_{Д}\dot{\varepsilon}(t), \quad (3)$$

где $k_{П}$, $k_{И}$ и $k_{Д}$ — автоматически настраиваемые параметры, $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$, $g(t)$ — задающее воздействие.

1. ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОРНЕЙ ПРИ ПИ УПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим возможности движения на комплексной плоскости крайних правых корней полинома (6) влево от мнимой оси при вариации параметров $k_{П}$ и $k_{И}$ для ПИ-закона управления (2). Под оптимальными параметрами понимаются такие, при которых выполняется условие

$$I_{оп} = -\min_{k_{П}, k_{И}} \max \operatorname{Re} \lambda_j(k_{П}, k_{И}), \quad (4)$$

где λ_j — корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i \lambda^i + k_0(k_{П}\lambda + k_{И}). \quad (5)$$

Оптимальные значения параметров $k_{П}$ и $k_{И}$ будем искать с помощью полинома, получаемого из полинома (5) заменой λ на $\lambda_1 = \lambda + I$. При этом, как показано в работе [7], в случае оптимальных значений $k_{П} = k_{П.оп}$ и $k_{И} = k_{И.оп}$ структура такого полинома при $I = I_{оп}$ (4) принимает вид

$$D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{П.оп}, k_{И.оп}) = \lambda_1^{n_q} \prod_{i=1}^{n_{k1}} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[n+1-n_q-2n_k]}(\lambda_1), \quad (6)$$

где $D_{1[n+1-n_q-2n_k]}(\lambda_1)$ — полином, не имеющий корней в правой полуплоскости, n_q и γ_i — кратности нулевого корня и комплексно сопряженных пар корней оптимального решения, расположенных на мнимой оси.

Смысл предлагаемого способа автоматического поиска оптимальных в смысле (4) значений параметров $k_{П}$ и $k_{И}$ для ПИ управления состоит в том, что если полином (6) не соответствует оптималь-

ному решению, т. е. не является ни одним из возможных семи случаев работы [7], то предлагается вариация значений $k_{П}$ и $k_{И}$, при которой любой из корней, расположенных на прямой $\lambda = -I$ в комплексной плоскости корней полинома (5), сдвигается влево, сохранив или увеличив значение степени устойчивости I (4). Из сказанного следует, что существует также вариация параметров $k_{П}$ и $k_{И}$, при которой любой из оставшихся корней также может быть сдвинут влево с сохранением или увеличением степени устойчивости системы (1), (2). Повторяя этот процесс необходимое число раз, можно все крайние правые корни системы (1), (2) сдвинуть влево, увеличив тем самым степень ее устойчивости.

Как следует из работы [7], в допредельных случаях расположения крайних правых корней полинома (6) могут быть действительные корни, действительный корень с комплексно-сопряженной парой корней и комплексно-сопряженные пары корней (табл. 1).

Покажем, что вариацией настроек параметров $k_{П\delta}$ и $k_{И\delta}$ в каждом из указанных случаев все крайние правые корни или часть таких корней могут быть сдвинуты влево.

Вариация настроек параметров $k_{П\delta}$ и $k_{И\delta}$ в случае 1 (см. табл. 1), при которой один корень сдвигается влево, а другой остается на месте, имеет вид $k_{П\delta} = k_{П} + \delta_{П}$, $k_{И\delta} = k_{И}$, где $\delta_{П} > 0$ — достаточно малое число, при котором корни полинома $D_{1(n+1-n_q-2n_k)}(\lambda_1, k_{П\delta}, k_{И\delta})$ (6) будут расположены левее прямой $\lambda = -I$. Один оставшийся корень сдвигается влево увеличением значения $k_{И}$, т. е. $k_{И\delta} = k_{И} + \delta_{И}$, где $\delta_{И} > 0$ — достаточно малое число.

Вариации настроек параметров $k_{П\delta}$ и $k_{И\delta}$ в случае 2, при которых действительный корень сдвигается влево, а комплексная пара корней остается на прямой $\lambda = -I$, будет при $k_{И\delta} = k_{И} + \delta_{И}$, где $\delta_{И} > 0$ — достаточно малое число, а значение

Таблица 1

Ближкие к оптимальным структуры крайних правых корней при ПИ управлении

1	$n_q = 2$ — действительный корень кратности 2
2	$n_q = 1, n_k = 1$ — действительный корень и пара корней
3	$n_k = 2$ — две некрратные пары

$k_{\text{П}\delta} = k_{\text{П}} + \delta_{\text{П}}$ может быть найдено из уравнения

$\text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{\text{И}} - \text{Re}_1(\omega_1^2)\delta_{\text{П}} = 0$, где

$$\begin{aligned} \text{Re}_1(\omega^2) &= \frac{\partial \text{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \\ \text{Im}_1(\omega^2) &= \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

а ω_1 — частота, на которой $\text{Re} D_{1(n+1)}(i\omega_1) = 0$ и $\text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega_1) = 0$.

Выбор вариации настроек в случае 3 определяется системой уравнений $\text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{\text{И}} - \text{Re}_1(\omega_2^2)\delta_{\text{П}} = \delta$,

$$\text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{\text{И}} - \text{Re}_1(\omega_2^2)\delta_{\text{П}} = \delta, \quad (8)$$

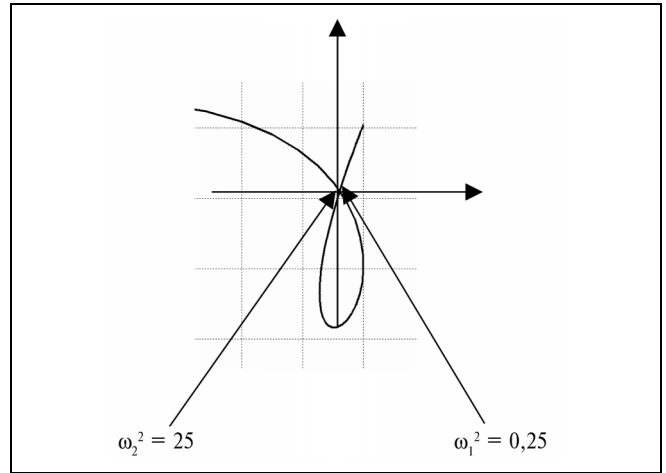
где $\delta > 0$ — достаточно малое число, при котором $\delta_{\text{И}}$ и $\delta_{\text{П}}$ таковы, что корни полинома $D_{1(n+1-n_q-2n_k)}(\lambda_1, k_{\text{П}}, k_{\text{И}})$ (6) будут левее прямой $\lambda = -I$. Если матрица системы уравнений (8) не вырождена, то из этой системы при заданном $\delta > 0$ однозначно определяются $\delta_{\text{И}}$ и $\delta_{\text{П}}$, при которых обе комплексные пары корней сдвигаются влево от прямой $\lambda = -I$, увеличивая тем самым степень устойчивости системы (1), (2). Если же матрица вырождена, но достаточное условие оптимальности случая 5 работы [7] не выполняется, то для определения искомым $\delta_{\text{И}}$ и $\delta_{\text{П}}$ достаточно задаться, например,

$\delta_{\text{И}} = \delta \cdot \sin \text{Re}_1(\omega_1^2)$, а $\delta_{\text{П}}$ найти из любого уравнения (8). Близкой также будет одна структура двух пар комплексных корней, частоты которых ω_1 и ω_2 сравнительно близки, а вариации $\delta_{\text{П}}$ и $\delta_{\text{И}}$ находятся из системы уравнений (8).

Выбор вариаций $\delta_{\text{П}}$ и $\delta_{\text{И}}$ в случае 3 наиболее сложный из всех рассмотренных, поэтому для большей ясности имеет смысл проиллюстрировать его примером.

Пусть $D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{П.оп}}, k_{\text{И.оп}}) = D_{1(6)} = (\lambda_1^2 + 0,25)(\lambda_1^2 + 25)(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re}_1(\omega^2) &= \frac{\partial \text{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)} = \\ &= (-\omega^2 + 1)(-\omega^2 + 0,25)(\omega^2 + 25), \\ \text{Im}_1(\omega^2) &= \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)} = \\ &= 2(-\omega^2 + 0,25)(-\omega^2 + 25). \end{aligned}$$



Годограф полинома (6) при $\delta_{\text{П}} = \delta_{\text{И}} = 0$

Нетрудно проверить, что соответствующая этим функциям система уравнений (8) имеет вид

$$\begin{aligned} -49,5\delta_{\text{П}} + 18,56\delta_{\text{И}} &= \delta, \\ 49,5\delta_{\text{П}} + 594\delta_{\text{И}} &= \delta. \end{aligned}$$

Если, например, $\delta = 0,01$, то приращения $\delta_{\text{П}}$ и $\delta_{\text{И}}$, которые делают полином $D_{1(6)}$ шестой степени устойчивым, таковы: $\delta_{\text{П}} = 0,0032$, $\delta_{\text{И}} = 0,00019$. Таким образом, имея значения двух пар крайних правых комплексно сопряженных корней полинома (6), можно приращениями $\delta_{\text{П}}$ и $\delta_{\text{И}}$ их сдвинуть влево, если определитель системы уравнений (8) не равен нулю.

Годограф (см. рисунок) соответствует полиному, имеющему пару комплексно сопряженных чисто мнимых корней. При $\delta_{\text{П}} = 0,0032$ и $\delta_{\text{И}} = 0,00019$ годограф сдвигается вверх и немного вправо, что означает сдвиг мнимых корней полинома (6) в левую полуплоскость и устойчивость полинома $D_{1(6)}(\delta) = (\lambda_1^2 + 0,25)(\lambda_1^2 + 25)(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1) + 0,0032\lambda_1 + 0,00019$, что иллюстрирует сделанное утверждение.

2. ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОРНЕЙ ПРИ ПИД УПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим теперь возможности движения крайних правых корней полинома (6) влево при вариации параметров $k_{\text{П}}$, $k_{\text{И}}$ и $k_{\text{Д}}$ для ПИД-закона управления (3). Под оптимальными параметрами понимаются такие, при которых выполняется условие

$$I_{\text{оп}} = -\min_{k_{\text{П}}, k_{\text{И}}, k_{\text{Д}}} \max \text{Re} \lambda_j(k_{\text{П}}, k_{\text{И}}, k_{\text{Д}}), \quad (9)$$



где λ_j — корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i \lambda_i + k_0(k_{\Pi}\lambda + k_{И} + \lambda^2 k_{Д}). \quad (10)$$

Будем искать оптимальные значения k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ с помощью полинома, также получаемого заменой в полиноме (10) λ на $\lambda_1 = \lambda + I$. При этом, как показано в работе [6], в случае оптимальных значений $k_{\Pi} = k_{\Pi.оп}$, $k_{И} = k_{И.оп}$ и $k_{Д} = k_{Д.оп}$ структура такого полинома при $I = I_{оп}$ (9), (10) принимает вид

$$D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\Pi.оп}, k_{И.оп}, k_{Д.оп}) = \lambda_1^{n_q} \prod_{i=1}^{n_{k1}} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[n+1-n_q-2n_k]}(\lambda_1). \quad (11)$$

Как и в случае ПИ управления, смысл поиска оптимальных в смысле (9) значений параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ для ПИД управления состоит в том, что если полином (11) не представляет собой ни один из возможных 10-ти случаев работ [8, 9], то всегда можно найти вариации значений k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$, при которых хотя бы один из корней, расположенных на прямой $\lambda = -I$ комплексной плоскости корней в плоскости корней полинома (11), сдвинется влево, сохранив или увеличив значение степени устойчивости I (9). Повторяя этот процесс необходимое число раз, можно все крайние правые корни системы (1), (3) сдвинуть влево, увеличив степень устойчивости этой системы.

Как следует из работ [8, 9], в допредельных случаях расположения крайних правых корней полинома (11) могут быть действительные корни, действительный корень с комплексно-сопряженной парой корней и комплексно-сопряженные пары корней (табл. 2).

Покажем, что вариацией настроек параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ в каждом из указанных случаев все крайние правые корни или часть таких корней могут быть сдвинуты влево.

Таблица 2

Бликие к оптимальным структуры крайних правых корней при ПИД управлении

1	$n_q = 3$ — действительный корень кратности 3
2	$n_q = 2, n_k = 1$ — действительный корень кратности 2 и комплексная пара корней
3	$n_q = 1, n_{k1}, n_{k2}$ — действительный корень и две некрратные комплексные пары
4	n_{k1}, n_{k2}, n_{k3} — три некрратные комплексные пары
5	$n_k = 2$ — кратная комплексная пара корней

Вариация настроек параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ в случае 1 (см. табл. 2), при которой один корень сдвигается влево, а остальные останутся на месте, имеет вид $k_{Д\delta} = k_{Д} + \delta_{Д}$, $k_{\Pi\delta} = k_{\Pi}$ и $k_{И\delta} = k_{И}$, где $\delta_{Д} > 0$ — достаточно малое число, при котором корни полинома $D_{1(n+1-n_q-2n_k)}(\lambda_1, k_{\Pi\delta}, k_{И\delta}, k_{Д\delta})$ будут расположены левее прямой $\lambda_1 = 0$ в плоскости корней λ_1 полинома (11). Два оставшихся корня сдвигаются влево, например, так, как это было сделано в случае 1 табл. 1.

Вариация настроек параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ в случае 2, при которой один действительный корень сдвигается влево, а другой действительный корень и комплексная пара корней остаются на прямой $\lambda = -I$ в плоскости корней λ полинома (10), будет при $k_{\Pi\delta} = k_{\Pi} + \delta_{\Pi}$, где $\delta_{\Pi} > 0$ — достаточно малое число, а $k_{И\delta} = k_{И}$, т. е. $\delta_{И} = 0$. В этом случае $\delta_{Д}$ находится из уравнения

$$-\text{Re}_1(\omega_1^2)\delta_{\Pi} - \omega_1^2 \text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{Д} = 0. \quad (12)$$

Значение $\delta_{\Pi} > 0$ выбирается настолько малым, чтобы при найденном из уравнения (12) значении $\delta_{Д}$ корни полнома $D_{1(n+1-n_q-2n_k)}(\lambda_1, k_{\Pi\delta}, k_{И\delta}, k_{Д\delta})$ (12) находились в левой полуплоскости корней λ_1 .

Вариация настроек параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ в случае 3, при которой один действительный корень сдвигается влево, а комплексные пары корней остаются на прямой $\lambda = -I$ в плоскости корней λ полинома (10), будет при $k_{И\delta} = k_{И} + \delta_{И}$, где $\delta_{И} > 0$ — достаточно малое число, а значения $k_{\Pi\delta} = k_{\Pi} + \delta_{\Pi}$ и $k_{Д\delta} = k_{Д} + \delta_{Д}$ находятся из уравнений

$$\text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{И} - \text{Re}_1(\omega_1^2)\delta_{\Pi} - \omega_1^2 \text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{Д} = 0,$$

$$\text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{И} - \text{Re}_1(\omega_2^2)\delta_{\Pi} - \omega_2^2 \text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{Д} = 0.$$

Вариация δ_{Π} , $\delta_{И}$ и $\delta_{Д}$ настроек параметров k_{Π} , $k_{И}$ и $k_{Д}$ в случае 4, при которой одна комплексная пара корней сдвигается влево, а оставшиеся две пары корней остаются на прямой $\lambda = -I$ плоскости корней λ полинома (10), может быть найдена, как следует из работы [6], с помощью системы уравнений, аналогичных уравнению (12):

$$\text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{И} - \text{Re}_1(\omega_1^2)\delta_{\Pi} - \omega_1^2 \text{Im}_1(\omega_1^2)\delta_{Д} = 0,$$

$$\text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{И} - \text{Re}_1(\omega_2^2)\delta_{\Pi} - \omega_2^2 \text{Im}_1(\omega_2^2)\delta_{Д} = 0,$$

$$\text{Im}_1(\omega_3^2)\delta_{И} - \text{Re}_1(\omega_3^2)\delta_{\Pi} - \omega_3^2 \text{Im}_1(\omega_3^2)\delta_{Д} = 0,$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число, но эта ситуация была рассмотрена ранее в случае 3 (табл. 1).

Вариация δ_{Π} , $\delta_{И}$ и $\delta_{Д}$ настроек k_{Π} , $k_{И}$ и $\delta_{Д}$ в случае 5, при которой кратная комплексная пара корней превратится в некрatную пару и останется на прямой $\lambda = -I$ плоскости корней λ полинома (10), может быть найдена из уравнений:

$$\text{Im}_2(\omega_1^2)(-\delta_{Д}) = \delta, \quad \delta_{И} = \delta_{Д}\omega_1^2 \text{ и } \delta_{\Pi} = 0,$$

где $\text{Im}_2(\omega^2) = \frac{\partial \text{Im}_1(\omega^2)}{\partial(\omega^2)}$, ω_1 — частота кратной пары

корней, где $\delta > 0$ — достаточно малое число. Некратная пара корней была рассмотрена в случае 3 табл. 1.

Входящие в приведенные выше формулы частоты ω_i и соответствующие им величины $\text{Re}_1(\omega_i^2)$ и $\text{Im}_1(\omega_i^2)$ (7) могут быть найдены с помощью годографа

$$Z_{n0}(i\omega) = \text{Re}D_{1(n+1)}(i\omega) + i\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega) = \text{Re}_0(\omega^2) + i\text{Im}_0(\omega^2), \quad (13)$$

получаемого из полинома $D_{1(n+1)}(\lambda)$ (5) или (10) при $\lambda = \lambda_1 - I$, $\lambda_1 = i\omega$ и любом действительном значении I .

3. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ НАСТРОЕК ПРИ ПИ- И ПИД-ЗАКОНАХ УПРАВЛЕНИЯ

Процедура поиска приведенных в работах [7–9] структур начинается с некоторых начальных значений настроек $k_{\Pi} = k_{\Pi 0}$, $k_{И0} = k_{И0}$, $k_{Д} = k_{Д0}$ и $I = I_0$, при которых годограф (13) соответствует устойчивому полиному $D_{1(n+1)}(\lambda_1)$ (6) или (11), т. е. он с ростом частоты ω от значения $\omega = 0$ обходит против часовой стрелки, начиная с первого квадранта, $(n+1)$ квадрант комплексной плоскости λ_1 . В этом случае для любых $\omega \geq 0$ сумма модулей $|\text{Re}D_{1(n+1)}(i\omega)| + |\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega)| > \delta$, где δ — некоторое положительное число.

С ростом значения I от $I = I_0$ до некоторого $I = I_1 > I_0$ возможны два варианта поведения годографа (13). В первом из них он при некотором $\omega = \omega_{1,1} = 0$ начинается на положительной части мнимой оси, т. е. $\text{Re}D_{1(n+1)}(0) = 0$, а $\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(0) > 0$, а во втором при $\omega = \omega_{1,1} > 0$ пройдет через начало координат, т. е. $\text{Re}D_{1(n+1)}(i\omega_{1,1}) = 0$ и $\omega_{1,1}^{-1}D_{1(n+1)}(i\omega_{1,1}) = 0$. Первый вариант означает, что крайним правым корнем полинома (5) или

(11) при $\omega = 0$ является действительный корень кратности 1, в случае второго варианта крайними правыми корнями полинома (5) или (10) при $\omega = \omega_{1,1} > 0$ будет комплексно сопряженная пара корней.

Изменяя как в ПИ, так и в ПИД управлении настройки $k_{\Pi} = k_{\Pi 0}$, $k_{И} = k_{И0}$ и $k_{Д} = k_{Д0}$, можно добиться, чтобы при $\omega = \omega_{1,1} \geq 0$ стало выполняться неравенство $|\text{Re}D_{1(n+1)}(i\omega)| + |\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega)| > \delta$, где δ — достаточно малое число. Вариация настроек для случая $\omega = \omega_{1,1} = 0$ имеет вид $k_{\Pi 1} = k_{\Pi 0}$, $k_{И 1} = k_{И0}$, $k_{Д 1} = k_{Д0}$, где $\delta_{И 1} > 0$, а для случая $\omega = \omega_{1,1} > 0$ нужную вариацию можно получить для ПИ управления из уравнения $\text{Im}_1(\omega_{1,1}^2)\delta_{И 1} - \text{Re}_1(\omega_{1,1}^2)\delta_{\Pi 1} = \delta > 0$, а для ПИД управления — из уравнения $\text{Im}_1(\omega_{1,1}^2)\delta_{И 1} - \text{Re}_1(\omega_{1,1}^2)\delta_{\Pi 1} - \omega_{1,1}^2 \text{Im}_1(\omega_{1,1}^2)\delta_{Д 1} = \delta_1 > 0$. Из этих уравнений, задавшись вариацией, например, $\delta_{\Pi 1} = 0$, для ПИ управления и вариациями $\delta_{\Pi 1} = 0$ и $\delta_{Д 1} = 0$ для ПИД управления, неизвестную вариацию $\delta_{И 1}$ найдем из уравнения $\delta_{И 1} = \delta_1 \text{Im}_1^{-1}(\omega_{1,1}^2)$, если $\text{Im}_1(\omega_{1,1}^2) \neq 0$. В этом случае $k_{\Pi 1} = k_{\Pi 0}$, $k_{И 1} = k_{И0} + \delta_{И 1}$, $k_{Д 1} = k_{Д0}$ и годограф (13) уже при $I = I_1 > I_0$ будет соответствовать устойчивой системе (1), (2) или (1), (3).

Повторяя описанную процедуру несколько раз, на некотором g -м шаге при $I = I_g > I_1$ получим в качестве крайних правых корней полинома (5) или (11) на прямой $\lambda_1 = 0$ плоскости корней λ полинома (6) или (11) дополнительные корни, которые задаются одной из трех структур:

— равенство нулю корней полиномов (6) или (12) на нулевой частоте $\omega = \omega_{1,g} = 0$, когда $\text{Re}D_{1(n+1)}(0) = 0$, и $\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega) = 0$ при $\omega = 0$, что соответствует одному крайнему правому действительному корню кратности два полинома (5) или (11);

— равенство нулю корня на нулевой частоте $\omega = \omega_{1,g} = 0$, когда $\text{Re}D_{1(n+1)}(0) = 0$, и $\omega^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega) > 0$ при $\omega = \omega_{1,g} = 0$, и равенство нулю модуля корня на частоте $\omega = \omega_{2,g} > 0$, когда

$\text{Re}D_{1(n+1)}(i\omega_{2,g}) = 0$ и $\omega_{2,g}^{-1}\text{Im}D_{1(n+1)}(i\omega_{2,g}) = 0$, что соответствует одному действительному корню кратности один и комплексной паре корней полинома (6) или (11), расположенных на прямой $\lambda_1 = 0$ плоскости корней λ_1 полинома (6) или (11);

— равенство нулю модулей корней полинома (6) или (11) на частотах $\omega = \omega_{1,g} > 0$ и $\omega = \omega_{2,g} \geq \omega_{1,g} >$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

> 0 , когда $\operatorname{Re}D_{1(n+1)}(i\omega_{1,g}) = 0$, $\omega_{1,g}^{-1} \operatorname{Im}D_{1(n+1)}(i\omega_{1,g}) = 0$, $\operatorname{Re}D_{1(n+1)}(i\omega_{2,g}) = 0$ и $\omega_{2,g}^{-1} \operatorname{Im}D_{1(n+1)}(i\omega_{2,g}) = 0$, при которых крайними правыми корнями полинома (5) или (11) являются две комплексные пары корней. Эти пары, вообще говоря, могут образовывать одну комплексную пару корней кратности два при $\omega_{2,g} = \omega_{1,g} > 0$.

Вариации настроек, приводящие к увеличению степени устойчивости систем (1), (2) или (1), (3) во всех этих трех структурах, были рассмотрены ранее (см. табл. 1 и 2). Указанные ситуации относились как к ПИ, так и к ПИД управлению, но в случае ПИД управления вариацию $\delta_{д1} = 0$ дифференциальной составляющей $k_{д} = k_{д1}$ в (3) следует брать нулевой.

При дальнейшем увеличении I от значения $I = I_g$ на прямой $\lambda_1 = 0$ плоскости корней λ_1 полинома (6) или (11) будут появляться дополнительные корни полиномов (5) или (10), и оптимизация настроек при ПИД управлении (3) и таком числе этих корней будет невозможной без вариации $\delta_{д}$ дифференциальной составляющей $k_{д}$. Все возможные варианты увеличения степени устойчивости системы (1), (3) в зависимости от числа крайних правых корней полинома (11) были рассмотрены в указанных выше случаях.

Рассмотренный способ увеличения степени устойчивости систем (1), (2) или (1), (3) сравнительно просто может быть реализован путем разработки соответствующих программных средств. Процесс увеличения степени устойчивости естественным образом заканчивается, когда при ПИ управлении крайние правые корни полинома (6) определяют одну из 7 структур, описанных в работе [7], а при ПИД управлении крайние правые корни полинома (12) определяют одну из 10 структур, описанных в работах [8, 9]. Разработанные программные средства обеспечивают автоматический поиск оптимальных по степени устойчивости решений, в результате которого определяются оптимальные настроечные параметры, степень устойчивости, крайние правые корни соответствующих полиномов и вид годографа, позволяющий определить тип вырождения, препятствующий дальнейшему увеличению степени устойчивости системы. Рассмотренный способ машинной оптимизации параметров может быть одинаково эффективным при работе с объектами, которые описываются конечномерными дифференциальными уравнениями, так и с объектами, в описание которых входит запаздывающий аргумент, что позволит ему найти широкое практическое применение.

Показана возможность определения вариаций настроечных параметров как в ПИ-, так и в ПИД-регуляторах, обеспечивающих увеличение степени устойчивости замкнутых систем управления. Итерационный процесс поиска таких вариаций может быть организован в автоматическом режиме с помощью специально разработанных программ. В результате автоматического поиска определяются значение максимальной степени устойчивости, соответствующие ей настроечные параметры регулятора, значения крайних правых корней оптимального полинома и вид соответствующего этим корням годографа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛКВВИА, 1949.
2. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978.
3. *Поляк Б.Т., Шербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
4. *Грязина Е.Н.* К теории D-разбиения // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 12. — С. 15—28.
5. *Шубладзе А.М.* Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 3. — С. 93—105.
6. *Шубладзе А.М.* Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II // Там же. — 1997. — № 8. — С. 67—79.
7. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИ управлении / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, С.И. Кузнецов, А.А. Якушева // Проблемы управления. — 2008. — № 2. — С. 12—20.*
8. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 1 // Управление большими системами. — 2008. — Вып. 22. — С. 86—100. — Режим доступа: <http://ubs.mtas.ru/>.*
9. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 2. / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, С.И. Кузнецов и др. // Управление большими системами. — 2009. — Вып. 23. — С. 39—55. — Режим доступа: <http://ubs.mtas.ru/>.*

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Бобриков Николай Михайлович — нач. департамента, ОАО «Газавтоматика», ☎(499) 580-41-08,

Денисов Игорь Константинович — гл. инженер проекта, ОАО «Газавтоматика», ☎(499) 580-41-19,

Кузнецов Сергей Иванович — ген. директор ОАО «НИИТЕПЛОПРИБОР», ☎(495) 999-18-16,

Шубладзе Александр Михайлович — зав. лабораторией, д-р техн. наук, профессор, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-88-81, e-mail: shub@ipu.rssi.ru.