УДК 51-74 + 517.22 + 656.051

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМИ СИСТЕМАМИ[1]

С.Л. Блюмин, А.С. Сысоев

Рассмотрена постановка задачи оптимизации процесса функционирования регулируемого перекрестка. Исследована возможность применения теоремы Лагранжа о конечных приращениях к выработке управленческих решений по реорганизации работы регулируемого перекрестка. Приведен численный пример.

Ключевые слова: теорема Лагранжа о конечных приращениях, управление транспортными системами, транспортная задержка.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы, связанные с управлением транспортными потоками, становятся все острее, о чем свидетельствуют, в частности, транспортные заторы на пересечении городских магистралей (так называемые «пробки»).

Различают два направления исследований [1] этих проблем — управление системой связанных перекрестков (реализуется с помощью настройки планов координации и программы «зеленая волна») и управление отдельным регулируемым перекрестком, которое бывает полезно в часы пик для некоторых элементов транспортной сети мегаполиса.

Для оценки качества функционирования регулируемых перекрестков обычно принимается значение средней транспортной задержки регулирования, представляющей собой функцию одного или нескольких аргументов. Минимизация этой функции по соответствующим аргументам дает оптимальное значение длительности цикла и ее оптимальное распределение по фазам регулирования.

Представляет интерес задача исследования поведения этой функции при изменении ее аргументов. Ее решение может быть получено с помощью анализа функций на основе теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Ранее подобный метод был описан в контексте экономического факторного анализа производственных функций [2]. Приведенные в настоящей статье рассуждения аналогичны рассуждениям, положенным в основу [2], с той лишь разницей, что оцениваются не производственные функции, а функции, описывающие параметры транспортных систем.

1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ РЕГУЛИРУЕМОГО ПЕРЕКРЕСТКА

Задача оптимизации функционирования регулируемого перекрестка понимается как поиск оптимальных длительности цикла светофорного регулирования и ее распределения по фазам регулирования.

В строгой постановке: найти вектор $[T, g_1, ..., g_m]$, такой что

$$D = \sum_{i=1}^{m}\left(k_f^i \frac{(T-g_i)^2 s_i}{T(s_i - v_i)} + \frac{T}{4}\left(\left(\frac{v_i T}{g_i s_i} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{v_i T}{g_i s_i} - 1\right)^2 + 14\,400\frac{v_i T}{g_i^2 s_i^2}}\right)\right)v_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i \to \min \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-07-97519 р_центр_а).

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = T, \qquad (2)$$

$$T_{\min} \leqslant T \leqslant T_{\max}, \qquad (3)$$

$$(g_i)_{\min} \leqslant g_i \leqslant (g_i)_{\max}, \quad i = 1, ..., m. \qquad (4)$$

Здесь T — длительность цикла светофорного регулирования, с, g_i, $i = 1, ..., m$, — длительность фаз светофорного регулирования, с, $D(T, g_1, ..., g_m)$ — значение функции агрегированной задержки, с, k_f^i, $i = 1, ..., m$, — коэффициент, определяющий тип прибытия транспортных средств (т. е. насколько плотным потоком транспортные средства прибывают к рассматриваемому перекрестку), v_i, $i = 1, ..., m$, — интенсивность прибытия транспортных средств на i-е *направление* (приведенные автомобили в час), s_i, $i = 1, ..., m$, — поток насыщения i-го направления, прив. авт./ч.

Учитывая ограничения (2) и (3), получим множество X, на котором минимизируется функция (1). Задача сводится к задаче условной минимизации с ограничением в виде равенства (2). Для перехода к задаче безусловной минимизации построим квадратичную штрафную функцию $\varphi(g, T, \beta)$, которая будет стремительно увеличиваться за пределами множества X и обращаться в ноль внутри него.

Получаем задачу многомерной безусловной минимизации

$$\tilde{D} = D + \varphi(g, T, \beta) \to \min. \qquad (5)$$

Решение задачи (5) проведено численно на основе предложенного мультистартового параллельного алгоритма безусловной многомерной минимизации [3].

Численный пример решения задачи управления регулируемым перекрестком путем отыскивания оптимальных длительности цикла регулирования и ее распределения по фазам регулирования минимизацией функции агрегированной задержки рассмотрен в § 4.

2. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА О ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТОЧКЕ

Описываемый подход пришел из экономики. Математическому понятию «значение функции» в экономическом анализе соответствует понятие «значение результирующего показателя», а понятию «приращение переменной» — «приращение фактора, оказывающего на этот показатель влияние». Основная задача экономического факторного анализа состоит в оценке влияния факторов на результирующий показатель [2, 4]. Однако данный подход может применяться не только для анализа экономических процессов, но и многих других, в том числе процессов в технических системах.

Задача оценки влияния факторов опирается на исчисление конечных разностей, связываемое, в свою очередь, через теорему Лагранжа о промежуточной точке (конечных приращениях, средней точке) с дифференциальным исчислением [5]. В зависимости от вида представления изменения значения функции (показателя) и ее аргументов (факторов), выделяются аддитивное исчисление (исчисление конечных разностей, в качестве изменения значения величины принимают приращение или разность $\Delta x = x - x_0$), мультипликативное исчисление (исчисление конечных частных, в качестве изменения значения величины — индекс или частное $ix = x/x_0$, при $x_0 \neq 0$), а также их комбинации.

Из математического анализа известна модель, характеризующая зависимость приращения (отклонения, разности) значения функции (отклика, показателя) от приращения (отклонения, разности) аргумента (переменной, фактора). Это — теорема Лагранжа о средней (промежуточной) точке [6]:

$$\Delta f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta x_i (x_1^0 + \alpha\Delta x_1, ..., x_n^0 + \alpha\Delta x_n), \qquad (6)$$

где x_i^0 и Δx_i, $i = 1, ..., n$, — начальные значения и приращения аргументов функции соответственно, $\alpha \in (0; 1)$ — параметр смещения промежуточной точки.

Ранее возникала идея получения альтернативных форм теоремы Лагранжа, в которой конечные разности (приращения) — аддитивные меры различия чисел — замещены конечными частными (индексами) — мультипликативными мерами различия [5, 7, 8].

Итак, теорема Лагранжа представляет собой основную модель аддитивного исчисления (6). Путем логарифмирования (экспоненцирования) аргумента (функции) возможно получение основной модели мультипликативного исчисления (7) и смешанных моделей мультипликативно-аддитивного (8) и аддитивно-мультипликативного исчислений (9):

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\Delta x_i, \quad (7)$$

$$iy = \prod_{i=1}^{n} (ix_i)^{\gamma_i}, \quad (8)$$

где $\gamma_i = \frac{\xi_i}{f(\xi_1, ..., \xi_n)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ — частные эластичности в промежуточной точке.

$$iy = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\frac{1}{f(\xi_1, ..., \xi_n)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \right) \right)^{\Delta x_i}, \quad (9)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \cdot \xi_i \right) \ln i x_i. \quad (10)$$

Перспектива применения моделей для анализа функции транспортной задержки с целью выработки управляющих решений на примере модели (7) показана далее.

3. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим класс рациональных функций специального вида:

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (11)$$

где $x_i \geqslant 0$, a_0, a_i, $b_i = \text{const} \geqslant 0$.

Начальным значениям аргументов x_i^0, $i = 1, ..., n$, отвечает начальное значение функции $f(x_1^0, ..., x_n^0)$. Аргументы претерпевают изменения Δx_i, которые порождают новые значения аргументов $x_i^0 + \Delta x_i$ и функции $f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n)$.

Частные производные функции (11):

$$\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = (a_i + 2b_i x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i - \left(a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2.$$

С одной стороны, приращение функции может быть вычислено как

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_n^0), \quad (12)$$

а с другой стороны, как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i (x_1^0 + \alpha\Delta x_i, ..., x_n^0 + \alpha\Delta x_n). \quad (13)$$

Приравнивая выражения (12) и (13) и решая полученное уравнение относительно α, получаем:

$$\alpha_{1,2} = \left(-\sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (x_i^0 - \Delta x_i)} \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

В силу предположения о положительности значений аргументов и их приращений, только значение α_1 (знак «+» перед квадратным корнем) удовлетворяет условию теоремы Лагранжа о принадлежности параметра промежуточной точки промежутку (0; 1).

В качестве примера рассмотрим анализ функции вида (11) от двух аргументов (оценка полученного результата с позиций транспортных систем приводится далее).

Рассматривая функцию двух аргументов, приходим к структуре вида

$$f(x_1, x_2) = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2}{x_1 + x_2}.$$

Начальным значениям аргументов x_1^0, x_2^0 отвечает начальное значение функции $f(x_1^0, x_2^0)$. Аргументы претерпевают изменения Δx_1, Δx_2, которые порождают новые значения аргументов $x_1^0 + \Delta x_1$, $x_2^0 + \Delta x_2$ и функции $f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$.

Частные производные:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{a_1 + 2b_1 x_1}{x_1 + x_2} - \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2}{(x_1 + x_2)^2},$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{a_2 + 2b_2 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

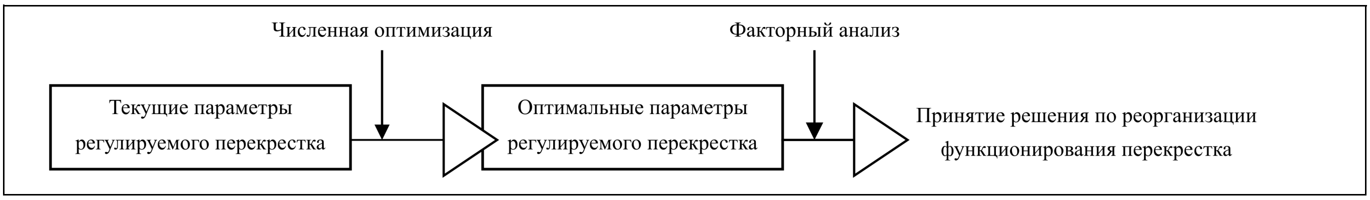

Рис. 1. Оптимизация и анализ функционирования регулируемого перекрестка

С одной стороны, приращение функции может быть вычислено как $f(x_1^0 + \Delta x_1, x_n^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$, а с другой — как $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right)(x_1^0 + \alpha\cdot\Delta x_1, x_2^0 + \alpha\cdot\Delta x_2)$.

Находя из равенства этих выражений, получаем (учитывая положительность аргументов и приращений):

$$\alpha = \frac{-(x_1^0 + x_2^0) + \sqrt{(x_1^0 + x_2^0)(x_1^0 + \Delta x_1 + x_2^0 + \Delta x_2)}}{\Delta x_1 + \Delta x_2}. \quad (14)$$

Перейдем к рассмотрению конкретных приложений.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Процесс последовательного применения оптимизации и анализа системы представлен на рис. 1 в виде структурной схемы. Минимизируется функция транспортной задержки, для анализа применяется теорема Лагранжа о промежуточной точке.

На этапе численной оптимизации находится оптимальный набор $[T, g_1, ..., g_m]$ — длительность цикла регулирования и ее распределение по фазам. Затем на этапе факторного анализа проводится (на основе статистической информации, собранной на данном объекте регулирования) предсказательный анализ изменения интенсивности движения в критических направлениях с целью выявления фазы, оказывающий наибольшее воздействие на изменение задержки на перекрестке. Особенность анализа состоит в том, что найденная фаза не обязана обладать наибольшим среди всех рассматриваемых в системе фаз отношением интенсивности к пропускной способности, v/c.

В качестве примера рассмотрим двухфазный регулируемый перекресток (рис. 2). Фаза 1 включает в себя направления движения *1*, *2*, *5* и *6*; критическим в этой фазе является направление *2*. Фаза *2* объединяет направления *3*, *4*, *7* и *8*; критическим в ней является направление *4*.

Входные интенсивности в критических группах фаз, а также результаты оптимизации для рассматриваемого примера представлены в табл. 1, где также приведены результаты оптимизации функционирования перекрестка традиционным методом Вебстера. Близость отношений v/c, полученных с помощью стандартного метода Вебстера и предлагаемого метода, подтверждает, что оптимизация проведена корректно.

Покажем применение факторного анализа, основанного на использовании модели (7), для выявления проблемной фазы регулирования. Больший практический интерес такой подход приобретает при большом числе фаз регулирования. Но для простоты понимания ограничимся рассмотрением двухфазной системы.

Рассмотрим модификацию функции из задачи (1), предложенную в работе [9]:

$$D = k_f^i \frac{(T - g_i)^2 s_i}{T(s_i - v_i)} + \frac{T}{4}\left(\left(\frac{v_i T}{g_i s_i} - 1\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(\frac{v_i T}{g_i s_i} - 1\right)^2 + 14\,400\frac{v_i T}{g_i^2 s_i^2}}\right). \quad (15)$$

Алгоритм получения средней задержки для регулируемого перекрестка приводит к модели вида

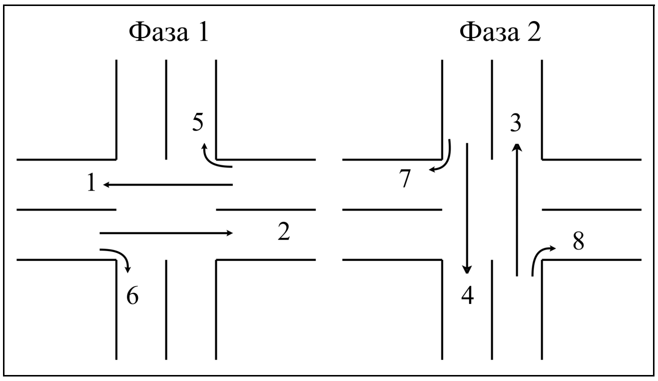

Рис. 2. Пример двухфазного регулируемого перекрестка

Таблица 1

Результаты оптимизации

Характеристика		Фаза 1	Фаза 2
Интенсивность критической группы, прив. авт./ч		180	1601
Поток насыщения, прив. авт./ч		1800	1800
Длительность фазы, с	до оптимизации после оптимизации после оптимизации методом Вебстера	18 15,5 7,9	39 24,3 13,8
Задержка в критической группе, с	до оптимизации после оптимизации после оптимизации методом Вебстера	16,97 9,69 6,08	27,72 23,01 21,56
Отношение v/c	до оптимизации после оптимизации после оптимизации методом Вебстера	0,317 0,257 0,275	1,299 1,457 1,399

$D = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)v_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} v_i$. Анализ этой функции, где в качестве каждого $d(v_i)$ выступает выражение (15), представляет собой вычислительно сложную задачу. Для упрощения анализа применим к функции D разложение в ряд Маклорена (до трех членов). В результате получим модель, структурно схожую с выражением (11). Здесь $a_0 = 0$, $a_i = \frac{1}{2} k_f^i T\left(1 - \frac{g_i}{T}\right)^2$, $b_i = \frac{1}{2}\frac{k_f^i(T - g_i)^2}{Ts_i} + \frac{1}{4}T\left(\frac{T}{g_i s_i} - \frac{T(g_i s_i - 7200)}{g_i^2 s_i^2}\right)$, $i = 1, ..., m$.

Параметр средней точки для данной модели в случае двух аргументов, согласно формуле (14), находится как

$$\alpha = \frac{-(v_1 + v_2) + \sqrt{(v_1 + v_2)(v_1 + \Delta v_1 + v_2 + \Delta v_2)}}{\Delta v_1 + \Delta v_2}.$$

Для некоторых начальных значений интенсивностей и их приращений выполнен полный факторный эксперимент (значение потока насыщения для всех фаз одинаково и равно 1800 прив. авт./ч). Значения параметров средней точки и приращения транспортной задержки, а также процентные значения коэффициентов факторного влияния приведены в табл. 2.

Например, для ситуации, когда интенсивность движения критической группы первой фазы равна 1000 прив. авт./ч, а второй — 120 прив. авт./ч; приращения интенсивностей равны соответственно 75 и 5, задержка станет больше на 159,47 с, причем на 70 % такое приращение определяется увеличением интенсивности критической группы второй фазы.

Таблица 2

Результаты анализа функции задержки регулирования

v_1	v_2	Δv_1	Δv_2	$v_1 + \alpha v_1$	$v_2 + \alpha v_2$	ΔD, с	Влияние v_1, %	Влияние v_2, %
1000	70	15	5 25	1007,465 1007,431	72,488 82,385	2,485 197,180	57 48	43 52
		75	5 25	1036,824 1036,663	72,455 82,221	329,072 444,307	58 49	42 51
	120	15	5 25	1007,467 1007,434	122,489 132,390	2,313 287,127	29 26	71 74
		75	5 25	1036,853 1036,698	122,457 132,233	159,473 389,049	30 27	70 73
1500	70	15	5 25	1507,476 1507,453	72,492 82,421	2,271 100,154	83 71	17 29
		75	5 25	1537,034 1536,921	72,469 82,307	398,044 437,816	85 72	15 28
	120	15	5 25	1507,477 1507,454	122,492 132,424	2,494 218,672	44 40	56 60
		75	5 25	1537,048 1536,938	122,470 132,313	267,177 434,851	45 41	55 59

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный метод может служить основанием для принятия управленческих решений по реорганизации существующего режима функционирования регулируемого перекрестка. Свою дальнейшую работу авторы связывают с исследованием возможности применения данного метода для анализа сети перекрестков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иносэ Х., Хамада Т.* Управление дорожным движением. — М.: Транспорт, 1983. — 248 с.
2. *Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарев С.В.* Экономический факторный анализ: Монография. — Липецк: ЛЭГИ, 2004. — 148 с.
3. *Сысоев А.С.* Численный алгоритм оптимизации функции транспортной задержки на регулируемом перекрестке // Научно-технический вестник Поволжья. — 2012. — № 5. — С. 324—330.
4. *Баканов М.И., Шеремет А.Д.* Теория экономического анализа — М.: Финансы и статистика, 1997. — 416 с.
5. *Блюмин С.Л.* Исчисление конечных разностей и частных // Фундаментальные исследования. — 2008. — № 3. — С. 105.
6. *Математический* анализ: учеб. / Под ред. А.Н. Тихонова. — 3-е изд., перераб. и доп.: в 2 ч. Ч. 1. — М.: ТК Велби, Проспект, 2006. — 672 с.
7. *Кац В.Г., Чен П.* Квантовый анализ / Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2005. — 128 с.
8. *Сысоев А.С.* Альтернативные формы представления теоремы конечных приращений Лагранжа и их применение // Сб. материалов междунар. форума студенческой и учащейся молодежи «Первый шаг в науку — 2009». Центр студенческих научных инициатив при Совете молодых ученых НАН Беларуси. — Минск: Право и экономика, 2010. — Т. 2. — С. 524—527.
9. *Canadian* Capacity Guide for Signalized Intersections 2008. Institute of Transportation Engineers, District 7 — Canada. ISBN 978-1-933-45224-1.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Дорофеюком.

Блюмин Семен Львович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
☎ (4742) 32-80-50, ✉ sabl@lipetsk.ru,

Сысоев Антон Сергеевич — ассистент,
☎ (4742) 32-80-50, ✉ anton_syssoyev@mail.ru,

Липецкий государственный технический университет.