УДК 519.21; 681.518

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТЬЮ СОТРУДНИКОВ ПРЕДПРИЯТИЯ

М.В. Белов

Рассмотрена задача управления численностью сотрудников предприятия с учетом неопределенности бизнеса и трафика сотрудников (процессов увольнений и приема на работу). Даны три варианта постановки задачи, каждый из которых отражает конкретные практические ситуации управления бизнесом: в условиях предположений менеджмента о стационарном или нестационарном развитии бизнеса, а также в случае минимальной априорной информации, требующий робастных решений. Для получения аналитического решения применен метод динамического программирования с вероятностной и интервальной моделями неопределенности. Отмечено, что отсутствие дополнительных предположений о свойствах неопределенности бизнеса и процессов трафика сотрудников (помимо границ интервалов допустимых значений) обеспечивает робастность полученного аналитического решения в интервальной постановке и существенно повышает его практическую ценность.

Ключевые слова: динамическое программирование, вероятностная неопределенность, интервальная неопределенность, управление численностью сотрудников, управление человеческим капиталом фирмы.

ВВЕДЕНИЕ: АКТУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ И ТРЕБОВАНИЯ К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Статья посвящена аналитическому решению задачи оптимального управления численностью сотрудников — частному случаю управления человеческим капиталом (ЧК) как основным ресурсом предприятия, интенсивно использующим знания и ЧК.

Человеческий капитал рассматривается как организованная совокупность специалистов, обладающих определенными знаниями, навыками, квалификацией и мотивированных на решение ставящихся перед ними задач. Для формализации ЧК используется понятие «функциональных домов» (ФД), введенное в статье [1], где было предложено рассматривать группы специалистов, обладающие эквивалентными функциональными возможностями для решения бизнес-задач, как ФД, а перспективную структуру предприятия — как организованный набор ФД. Учитывая широкое распространение различных форм временного привлечения человеческих ресурсов (например, аутстаффинг[1] и привлечение фрилансеров[2]), под сотрудниками «функциональных домов» будем понимать не только штатных сотрудников фирмы, но также привлекаемых фрилансеров и сотрудников аутстаффинговых фирм.

Бизнес создает потребность в сотрудниках различных ФД в различные моменты времени. Как правило, бизнес неравномерен, поэтому управление ЧК (в условиях неравномерной потребности) становится нетривиальной задачей. Состояние ЧК как объекта управления будем характеризовать численностями каждого из необходимых для бизнеса ФД.

---

[1] Аутстаффинг (*англ.* out — «вне» + staff — «штат») — способ управления персоналом, предполагающий оказание услуг в форме предоставления в распоряжение заказчика определенного числа работников, не вступающих с ним в какие-либо правовые отношения (гражданско-правовые, трудовые) напрямую, но оказывающих от имени исполнителя определенные услуги (работы) по месту нахождения заказчика.

[2] Фрилáнсер (*англ.* freelancer) — свободный работник, частный специалист.

Оптимальное управление ЧК формируется как решение задачи многошагового принятия решения (на каждом шаге) по численности штатных сотрудников и численности временно привлекаемых в разрезе ФД с учетом неравномерности потребности со стороны бизнеса в целях получения максимально возможного экономического эффекта — минимизации затрат на содержание ЧК.

Задача решается методами динамического программирования в рамках интервальной и вероятностной моделей неопределенности, каждая из которых предназначена для использования в конкретных практических случаях, анализ которых приведен в § 1 ниже. Статья продолжает развитие методов управления ЧК, начатое в работе [2], модели разрабатываются для того, чтобы на практике формировать математически обоснованные рекомендации по принятию управленческих решений менеджерами компаний.

Модели должны учитывать:

(а) численность сотрудников в разрезе их квалификации и мотивации, трафик штатных сотрудников (численности увольняющихся и принимаемых на работу сотрудников) и его неопределенность;

(б) затраты на содержание каждого штатного сотрудника (в том числе на его развитие и перемещения) и временно привлекаемого сотрудника;

(в) потребность бизнеса в определенной численности сотрудников в разрезе их квалификации, неравномерность и неопределенность бизнеса и, следовательно, потребности;

(г) предположения о свойствах процессов, описывающих трафик сотрудников и неопределенность потребности (например, о стационарности или наличии трендов развития процессов).

Модели должны позволять оценивать экономический эффект ЧК в целом в зависимости от факторов (а)—(г) и формировать управление, оптимальное в смысле максимизации экономического эффекта.

На практике апостериорные значения всех факторов (а)—(в) бывают известны точно, затраты (б) также известны точно и для прошедших периодов времени, и для будущих (на разумный горизонт упреждения). Однако априорная информация (а) и (в) о будущих состояниях и свойствах процессов, а также предположения (г) всегда носит неопределенный характер, поэтому формируемые моделями рекомендации по управлению должны быть нечувствительными к этим факторам.

Модели рассматриваются в дискретном представлении времени с фиксированной длительностью интервала, что достаточно естественно для бизнеса, где приняты отчетные периоды; в дальнейшем t будет означать номер интервала времени.

1. ИСТОЧНИКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Управление человеческим капиталом затрудняется неопределенностью, которая создается двумя источниками: неравномерностью бизнеса и, следовательно, неравномерностью потребности в ЧК со стороны бизнеса (процесс (а), см. Введение) и трафиком сотрудников — приемом и увольнениями по собственному желанию (процесс (в)). Традиционно неопределенность представляют с помощью случайных процессов, аналогично поступим и в данном случае моделирования источников неопределенности (процессов (а) и (в)).

Для формирования оптимальных управляющих воздействий требуется вся имеющаяся информация. Решение рассматриваемой задачи затрудняется отсутствием объективной априорной информации о процессах, вместо нее имеются и могут быть использованы:

(а) предположения, допущения экспертов (менеджеров) о свойствах процессов (параметрах бизнеса);

(б) экспертные оценки и прогнозы конкретных значений, сформированные экспертами;

(в) статистические оценки параметров на основе наблюдений за процессам в течение предыдущих интервалов времени.

При разработке методов решения необходимо учитывать, что информация видов (а) и (б) не может считаться точной и полной, так как предположения, допущения, экспертные оценки и прогнозы всегда субъективны. Статистические оценки (информация вида (в)) в свою очередь, даже будучи сильно состоятельными, формируются на выборках ограниченной длины, поэтому тоже не могут считаться «точными». Однако даже в условиях использования субъективной и неточной априорной информации имеет смысл разрабатывать строгие математические модели в целях построения прогнозных моделей и принятия управленческих решений на их основе. Это подтверждается следующими рассуждениями.

Менеджмент практически всегда может сформировать обоснованные предположения о будущем развитии бизнеса, за который несет ответственность (если это не так, то менеджмент не понимает своего бизнеса и должен быть заменен). Эти предположения могут быть сформулированы в форме экспертных оценок параметров или свойств процессов, описывающих бизнес компании и его контекст в виде сценариев его развития или иной форме. Если сформировать предположения так, чтобы они охватывали все наиболее вероятные варианты развития бизнеса, кроме форс-мажорных, то управление бизнесом будет оптимальным во всех случаях, кроме форс-мажорных обстоятельств. Исключение из рассмотрения форс-мажорных условий и снятие ответственности за действия в таких условиях — обычная бизнес-практика, поэтому логично применить такой подход и в данном случае.

Практически значимыми можно считать следующие три варианта предположений о характере развития бизнеса и его контекста.

I. Руководители считают, что бизнес-условия стабильны (характеристики источников неопределенности постоянны) и возможность их значимых изменений пренебрежимо мала в рамках рассматриваемого горизонта бизнес-прогнозирования. Имеются основания полагать, что характеристики процессов-источников неопределенности могут быть статистически оценены, и эти оценки будут адекватно описывать процессы в рамках горизонта прогнозирования. Задача для этого случая — стационарного процесса потребности в ЧК со стороны бизнеса и трафика сотрудников — будет рассмотрена в § 4.

II. Руководители имеют прогноз изменения бизнеса и/или рынка труда — свойств процессов изменения потребности и трафика сотрудников — и на основании прогноза готовы принимать ответственные решения. Соответствующая задача в общем случае не имеет аналитического решения, зато легко решается численно, (см. далее § 3). Возможны отдельные случаи, допускающие аналитические решения.

III. Руководители видят определенную стационарность бизнеса, но у них имеются соображения о его существенной неравномерности. Предполагается, что границы интервалов допустимых значений процессов могут быть корректно заданы. Но статистические оценки каких-либо других характеристик источников неопределенности, полученные на основе наблюдений за процессами, не будут адекватно отражать поведение процессов в будущем. Этот случай минимальной априорной информации о возможных свойствах процессов изменения потребности и трафика сотрудников будет рассмотрен в § 5.

Фактически варианты I и II отвечают случаям наличия у менеджмента сведений, позволяющих при наличии обоснованного сценария будущего сформировать определенное видение будущего развития ситуации — стационарный (вариант I) и нестационарный (вариант II) случаи. Вариант III отражает случай наличия у менеджмента минимальной априорной информации о бизнесе.

2. ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Начиная с работ Беллмана (см., например, обзор [3]) метод динамического программирования (ДП) применяется для управления ресурсами предприятий. В последние годы он стал применяться и для решения задач управления человеческими ресурсами. В ряде работ (в частности, в статье [4]) показано, что модели управления ЧК аналогичны модели управления запасами «Wagner-Whitin».

В работе [5] метод ДП применяется для составления расписания и распределения персонала по множеству проектов по критерию минимизации времени завершения проектов при ограничении на доступные ресурсы. В работе [6] рассматривается задача назначения сотрудников с помощью ДП на множество информационно-технологических проектов с учетом сложности каждого проекта и наличия ресурсов соответствующей квалификации. В работе [7] методом ДП решается задача формирования рабочего графика для сотрудников в специфическом случае, когда в течение каждой недели рабочие дни необходимо чередовать со днями отдыха, причем на последовательность чередования накладываются дополнительные ограничения. Критерием оптимальности служит минимизация затрат на оплату сотрудников (учитывая в том числе назначения на выходные дни). В работе [8] представлено оптимальное управление перемещениями исследователей в рамках учреждений академии наук Китая на основе методов ДП. Авторы работы [9] предлагают вычислительно эффективный алгоритм ДП для распределения разнородных человеческих и физических ресурсов предприятия в задачах транспортировки и логистики. В работе [10] ставится задача оптимального найма и продвижения сотрудников между позициями двух уровней, формулируются теоремы существования решений, задача решается численно, и решение иллюстрируется примерами. В работе [4] выделяются различные виды затрат на ЧК, разрабатывается модель планирования человеческих ресурсов с целью минимизации затрат, примененный подход проиллюстрирован численными примерами. В работе [11] предлагается модель марковского поведения каждого из статистически эквивалентных сотрудников различных грейдов. Методом ДП получены шаблоны оптимального найма и продвижения сотрудников. Оптимальность понимается как минимальное расхождение между целевым и текущим состоянием. Работа [12] посвящена управлению решением задачи управления запасами методами ДП в детерминированной постановке с импульсным управлением, терминальными ограничениями и разрывной целевой функцией.

Марковские модели достаточно широко используются для моделирования и анализа неопределенности в деятельности фирм. Например, поведения сервисных систем (call-center) — времени ожидания, вероятности отказа от обслуживания [13—15] операторов.

В работе [16] предлагается расширение известной нотации описания функционирования предприятий «Business Process Management Notation» (BPMN) элементами, названными «марковскими процессами принятия решений» (Markov Decision Processes) и предназначенными для представления действий сотрудников в ходе выполнения цепочек заданий — принятия решений. Введение таких элементов позволяет осуществлять с помощью BPMN полноценное имитационное моделирование в целях получения численных оценок операционной эффективности бизнеса в целом. В качестве формальной основы функционирования таких элементов предложено использовать различные известные формализмы, в частности, решения на основе метода ДП.

Автор статьи [17] рассматривает вопросы распределения ресурсов предприятия, оказывающего услуги. Для описания неопределенности, свойственной сервисным процессам, используются стохастические модели технологической функции (функция преобразования входов в выходы). Сервисное предприятие в целом представляется как стохастическая (вообще говоря, марковская) сеть.

Выбор стратегий определения уровней неснижаемых/возобновляемых запасов и вопросы управления заказами новых партий запасов в условиях случайной потребности изучаются в работе [18]. Потребности представляются пуассоновскими потоками, рассматриваются стратегии управления с обратными связями и с несколькими поставщиками.

В работе [19] марковская цепь используется для представления поведения сотрудников брокерских фирм. Цель такого моделирования состоит в оценивании будущих доходов, которые могут сформировать сотрудники. Такая оценка применяется для определения размера (в финансовом выражении) человеческого капитала брокерской фирмы при ее поглощении.

В работе [20] представлен набор инструментов, разработанный на основе методов исследования операций в фирме IBM для управления персоналом сервисного дивизиона (годовой оборот которого на момент написания статьи составлял $4 млрд). Цель разработки и внедрения инструментов — определение уровня инвестиций в развитие персонала для увеличения его бизнес-производительности. Разработчики выделили ряд направлений инвестиций как наиболее эффективных средств управления: найм, обучение, повышение по карьерной лестнице и удержание в фирме (через поощрения). Набор инструментов позволяет реализовать функции: прогнозирования спроса на человеческие ресурсы; планирования численности на основе риск-анализа; оценки развития и оптимизации квалификации сотрудников; анализа дефицитов и избытков ресурсов по различным специализациям и квалификациям; управления дефицитами и избытками. Для всех инструментов в статье представлены методики, основанные на марковских процессах.

Важно отметить, что в статье [19], написанной одним из основателей учета человеческих ресурсов (HR accounting) E.G. Flamholtz, и в статье [20], описывающей набор инструментов управления крупнейшей сервисной компанией мира, адекватной моделью сотрудников является представление их как независимо действующих агентов с марковским поведением.

Однако, несмотря на большое число работ, в подавляющем большинстве из них или используются упрощающие реальный бизнес предположения, или доказываются теоремы существования решений без получения аналитического решения уравнений Беллмана, или решения получаются в виде численных алгоритмов решения задачи.

Цель настоящей работы заключается в получении аналитического решения задачи ДП в постановках, отражающих практически интересные условия управления предприятием.

Опираясь на известные результаты, перейдем к постановке задачи.

3. ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

3.1. Представление человеческого капитала

Движение персонала отличается неопределенностью: численность не может полностью определяться руководством фирмы — увольнения по собственному желанию и прием предложений о работе при найме являются следствиями решений сотрудников, на которые менеджмент может влиять только опосредованно. Как правило, издержки, связанные с увольнением сотрудников по инициативе предприятия, весьма значительны, этот способ на практике не используется для регулярного управления численностью и рассматриваться далее не будет. Управляемым параметром будем считать число предложений о приеме на работу, сделанное в течение одного интервала времени.

Динамику состояния каждого из ФД, составляющих ЧК, будем характеризовать следующей моделью:

$$n(t+1) = n(t) - \mu^*(n(t), n(t-1), ..., n(0), u(t), t) + \\ + u(t) - \mu^{**}(n(t), n(t-1), ..., n(0), u(t), t),$$

где $n(t)$ — численность штатных сотрудников ФД на начало t-го интервала времени; $\mu^*(n(t), n(t-1), n(t-2), ..., n(0), u(t), t)$ — случайное число уволившихся сотрудников; запись $n(t-1), n(t-2), ..., n(0)$ отражает возможность зависимости $\mu^*(\cdot)$ от всей предыстории; $u(t)$ — параметр управления, число предложений о приеме на работу, сделанное в течение одного интервала времени; $\mu^{**}(n(t), n(t+1), n(t+2), ..., n(0), u(t), t)$ — случайное число сотрудников, не принявших предложение о приеме.

Несмотря на различие процессов $\mu^*(\cdot)$ и $\mu^{**}(\cdot)$ в смысле бизнеса, формально они влияют на численность ФД как единый процесс $\mu(\cdot) = \mu^*(\cdot) + \mu^{**}(\cdot)$, отражающий совокупную неопределенность трафика сотрудников. Тогда модель ФД примет вид:

$$n(t+1) = n(t) + u(t) - \mu(n(t), n(t-1), ..., \\ n(0), u(t), t). \quad (1)$$

В общем случае не делаем никаких предположений о свойствах процесса $\mu(\cdot)$.

3.2. Модель потребности в человеческом капитале со стороны бизнеса

Потребность в человеческом капитале определяется потоком действий различных типов, которые необходимо осуществить для выполнения обязательств предприятия перед рынком (возникающих в результате продаж и/или постоянно предлагаемых потребителям сервисов различных типов). Примерами таких действий служат операции по изготовлению деталей, сборке агрегатов, обслуживанию клиентов и др. Обозначим $d(t)$ — потребность в сотрудниках t-го ФД на t-м интервале времени:

$$d(t+1) = \\ = \delta(d(t), d(t-1), d(t-2), ..., d(0), t), \quad (2)$$

где $\delta(d(t), d(t-1), d(t-2), ..., d(0), t)$ — случайная величина, отражающая неопределенность бизнеса, возможно, зависящая от всей предыстории процесса $d(t)$, в общем случае также не будем делать предположений о свойствах процесса $\delta(\cdot)$.

3.3. Представление операционной деятельности предприятия

В рассматриваемой постановке принимаем, что стоимость ЧК в виде штатных сотрудников меньше, чем стоимость временно привлекаемых[3], обе эти величины известны и постоянны. Предполагаем, что более дорогие «внешние» ресурсы гарантированно доступны (могут быть привлечены «мгновенно», в любом объеме и на любой необходимый срок[4]). Пусть $0 < \hat{c}_{шт}$, c_{out} — затраты на содержание одного сотрудника ФД — штатного сотрудника или фрилансера или аутстафера в течение одного интервала времени; причем $0 < \hat{c}_{шт} < c_{out}$.

Предполагаем, что недостающую потребность восполняем внешними, более дорогими, но неограниченно доступными ресурсами (фрилансерами или аустаферами), т. е. текущие затраты за один интервал времени равны $\hat{c}_{шт}n(t) + c_{out}\max\{0, d(t) - n(t)\}$. Теоретически минимально возможными являются затраты в размере $\hat{c}_{шт}d(t)$ — когда численность всегда совпадает с потребностью.

Введем целевую функцию — превышение фактических затрат на человеческий капитал над минимально возможными в течение одного периода:

$$R(x) = \begin{cases} \hat{c}_{шт}x \text{ при } x \geq 0, \\ (c_{out} - c_{шт})|x| \text{ при } x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если разовые затраты на найм сотрудников в штат или привлечение внешних сотрудников пренебрежимо малы по сравнению с текущим содержанием (единицы процентов), что часто соответствует бизнес-практике, то целевая функция за период времени $1 \leq t \leq T$:

$$V_{0,T} = \sum_{t=1}^{T} \gamma^t R(n(t) + u(t) - \mu(t) - \delta(t)), \quad (4)$$

где γ — дисконтирующий по времени множитель.

Будем искать оптимальное управление, которое обеспечит минимум целевой функции $u(n, t) = = \arg\{\min_n V_{0,T}\}$.

Поставленная задача — типичная оптимизационная задача многошагового принятия решений, поэтому вполне естественно применить для ее решения метод динамического программирования.

Для варианта I предположений о характере развития бизнеса и его контекста (стабильность условий и возможность использования оценок харак-

---

[3] Если это не так, то очевидная стратегия заключается в отказе от штатных сотрудников и использовании только временно привлекаемых ресурсов в точном соответствии изменяющейся потребности.

[4] В «любом объеме» понимается в смысле возможности обеспечить любую практически возможную потребность бизнеса; «на любой необходимый срок» — привлечение может быть мгновенно завершено при исчезновении потребности.

теристик процессов для их описания в будущем) воспользуемся стационарными динамическими моделями процессов с вероятностными неопределенностями $\mu(t)$ и $\delta(t)$. Сделаем допущение (в дальнейшем будем ссылаться на него как на «допущение I») о независимости функций распределения вероятностей процессов δ и μ от времени и от предыдущих значений процессов, т. е. для любых t, $\mu(t-1)$, $\mu(t-2)$, , $\mu(0)$ и $\delta(t-1)$, $\delta(t-2)$, ..., $\delta(0)$ справедливы соотношения $Pr\{\delta(t) = d\} = Q_d$ и $Pr\{\mu(t) = m\} = P_m$. Тогда функциональные уравнения Беллмана примут форму:

$$F_T(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\mu-\delta)\,Q_\delta P_\mu\right\},$$

$$F_t(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\left[\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\mu-\delta)\,Q_\delta \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \,\gamma F_{t+1}(n+u-\mu)\right]P_\mu\right\}, \qquad (5)$$

где Q_δ и P_μ — функции распределения вероятностей процессов δ и μ.

«Допущение I» является корректным во многих практически интересных случаях развитого рынка труда, и часто принимаются для описания поведения сотрудников [12, 14, 15]. При устоявшихся и общепринятых требованиях к компетенциям, свободном законодательстве, признаваемым другими компаниями опыте, быстром вхождении новых сотрудников в деятельность предприятия модель поведения сотрудников хорошо описывается марковскими процессами, пример такого рынка рассмотрен в работе [2].

Уравнения (5) будут аналитически решены в § 4, в результате будет получена стратегия оптимального управления $u = u(n, t)$.

В случае варианта II предположений о характере развития бизнеса (наличие значимого прогноза изменения бизнеса и/или рынка труда — свойств процессов изменения потребности и трафика сотрудников) воспользуемся нестационарными динамическими моделями процессов с вероятностными неопределенностями $\mu(t)$ и $\delta(t)$. Тогда функциональные уравнения для оптимального управления примут вид:

$$F_T(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\delta-\mu) \; \times \right.$$

$$\left. \times \; Q_\delta(T)P_\mu(n+u, T)\right\}, \qquad (6)$$

$$F_t(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\left[\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\delta-\mu)Q_\delta(t) \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \,\gamma F_{t+1}(n+u-\mu)\right]P_\mu(n+u, t)\right\}.$$

Уравнения (6) в общем случае не имеют аналитического решения, но легко решаются численно.

В заключении будет указан частный случай аналитического решения уравнений (6).

В случае варианта III (минимальных априорных знаний об источниках неопределенности) воспользуемся интервальной моделью неопределенности. Тогда функциональные уравнения будут записаны как

$$F_T(n) = \min_{u \geq 0}\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-;\, \tilde{\mu}_+];\; \delta \in [\tilde{\delta}_-;\, \tilde{\delta}_+]}\{R(n+u-\mu-\delta)\},$$

$$F_t(n) = \min_{u \geq 0}\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-;\, \tilde{\mu}_+];\; \delta \in [\tilde{\delta}_-;\, \tilde{\delta}_+]}\{R(n+u-\mu-\delta) + \gamma F_{t+1}(n+u-\mu)\}, \qquad (7)$$

где $[\tilde{\mu}_-;\, \tilde{\mu}_+]$ и $[\tilde{\delta}_-;\, \tilde{\delta}_+]$ — интервалы допустимых значений процессов μ и δ, заданные своими границами.

Важно заметить, что в этом случае нет необходимости в каких-либо предположениях о свойствах процессов μ и δ. Решению уравнений (7) посвящен § 5.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрим стационарный случай: предположим, что процессы $d(t)$, $n(t)$, $u(t)$, $\mu(x, t)$ и $\delta(t)$ стационарные.

В рамках «допущения I» задача (1)—(5) представляют собой частный случай управляемой марковской цепи, которая достаточно подробно изучена в литературе по стохастическому оцениванию и управлению — см., например, работы [21, 22]. В первой из них подробно рассмотрена задача оценивания параметров марковской цепи, доказано существование и единственность оптимального управления ею, показано, что управляющие воздействия также образуют марковскую цепь. Для решения задачи (1)—(6) воспользуемся известными результатами и получим практически интересные выводы для важных частных случаев.

На основании результатов, полученных в работе [21], можно заключить, что выборочные гистограммы распределений Q_δ и P_μ будут наилучшими из оценок: выборочные гистограммы являются оценками максимального правдоподобия. Доказано [21], что оценки максимального правдоподобия параметров управляемой марковской цепи являются сильно состоятельными. Кроме этого, управление, построенное на основании таких оценок «самооптимизирующееся» (self-optimizing), т. е. сходящимся в смысле Чезаро к оптимальному управлению по критерию минимальной стоимости (см. теорему 6.5 [21], *с. 272*). Поэтому в дальнейшем будем использовать выборочные гистограммы Q_δ и P_μ в качестве распределений.

Оптимальное управление $u^*(n) = \arg\min_u\{...\}$ получается как решение функциональных уравнений (5) при условиях (1)—(4).

Все преобразования и объяснения, сопровождающие решение задачи (1)—(5) вынесены в Приложение.

Фактически управление сводится к поддержанию постоянного уровня $n(t) = x_{g\_opt}$, причем значение самого уровня x_{g_opt} зависит от свертки распределений P_μ и Q_δ, а не от каждого из распределений в отдельности и получается из правила $x_{g\_opt} = \Psi(\alpha_{\text{шт}\_out}; \hat{Q}_\varepsilon)$, определенного в Приложении.

При реализации данной стратегии управления модель поведения сотрудников и бизнеса в целом примет вид:

$$
\begin{gathered}
n(t+1) = x_{g\_opt} - \mu(x_{g\_opt}; \mathrm{t}) = x_{g\_opt} - \mu(t), \\
u(t+1) = x_{g\_opt} - n(t), \\
d(t+1) = \delta(t), \qquad (8) \\
V_{0,T} = \sum_{t=1}^{T} E[\gamma^t R(x_{g\_opt} - \mu(t) - \delta(t))].
\end{gathered}
$$

Важно отметить, что при получении решения (8) относительно свойств процессов $\mu(t)$ и $d(t)$ не было принято никаких предположений, кроме стационарности, т. е. неизменности распределений P_μ и Q_δ по времени. Эта особенность решения (8) имеет существенное практическое значение — обеспечивает устойчивость решения по отношению к форме распределений P_μ и Q_δ, что особенно важно в условиях неточного знания свойств этих распределений.

Базовое решение (8) пригодно для применения и в отдельных нестационарных случаях. В частности, при прогнозе роста потребности в виде $d(t) = d_0(t) + \delta(t)$, где $d_0(t)$ — известная неубывающая функция от t, а $\delta(t)$ — случайная последовательность, то оптимальная стратегия получится в виде: $u_{opt}(n, t) = x_{g\_opt} + d_0(t) - n(t)$.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МОДЕЛИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрим вариант III постановки, когда в задаче (1)—(4) известны только граничные значения интервалов допустимых значений процессов, отражающих неопределенность бизнеса $\delta(t)$ и трафика сотрудников $\mu(t)$. Относительно других характеристик процессов предположений не делается.

Решение задачи (1)—(4), (7) также вынесено в Приложение. Минимаксная стратегия для этого случая имеет тот же вид, что и для стационарного случая вероятностной неопределенности: поддержание постоянного уровня $x_{int} = \arg\{\min\{A_t([x_{<\mu\delta>}]); A_t([x_{<\mu\delta>}] + 1)\}\}$, где $x_{<\mu\delta>} = (1 - \alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{e}_+ + \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{e}_-$. Тогда минимаксная стратегия получится в виде $u_{\text{opt}}(n) = \max\{0, x_{game} - n\}$:

$$
\begin{gathered}
n(t+1) = x_{int} - \mu(x_{int}, t), \\
u(t+1) = \max_T\{0, x_{int} - n(t)\}, \\
d(t+1) = \delta(t), \\
V_{0,T} = \sum_{t=1}^{T} E[\gamma^t R(x_{int} - \mu(x_{int}, t) - \delta(t))].
\end{gathered}
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим полученные результаты.

Прежде всего, получены решения задачи управления человеческим капиталом для трех практически важных вариантов поведения бизнеса.

Вариант I. *Стационарная вероятностная постановка:* менеджмент считает возможным использовать полученные на основе предыстории оценки характеристик источников неопределенности для прогнозирования их будущего поведения.

Вариант II. *Нестационарная вероятностная постановка*: менеджмент имеет прогноз изменения бизнеса и/или рынка труда — свойств процессов изменения потребности и трафика сотрудников — и на основании прогноза готов принимать ответственные решения.

Вариант III. *Интервальная постановка*: менеджмент считает достоверными только границы интервалов допустимых значений процессов, не доверяя оценкам других характеристик.

Для вариантов I и III получены аналитические решения, для варианта II аналитическое решение (как развитие варианта I) может быть получено в некотором частном, указанном в статье, случае.

Полученные в аналитическом виде стратегии управления соответствуют интуитивно понятным стратегиям поддержания постоянного уровня численности сотрудников. Постоянные уровни в обоих случаях зависят от:

— отношения затрат на содержание одного штатного сотрудника к затратам на фрилансера или аутстафера;

— характеристик суммарного процесса потребности в сотрудниках со стороны бизнеса и трафика сотрудников (см. выражения для x_{g_opt} и x_{int}).

Наконец, полученные результаты описывают простые стратегии управления, и для их получения было сделано небольшое число предположений о реальных процессах (в интервальной постановке вообще не было сделано никаких предположений, кроме граничных значений интервалов допустимых значений). Поэтому полученные стратегии мало чувствительны к заданию условий применения и просты для практической реализации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. Решение функциональных уравнений вероятностной задачи

Решаем задачу (5):

$$F_T(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\mu-\delta)Q_\delta P_\mu\right\},$$

$$F_t(n) = \min_{u \geq 0}\left\{\sum_{\mu=0}^{n+u}\left[\sum_{\delta=d_{\min}}^{d_{\max}} R(n+u-\mu-\delta)Q_\delta + \gamma F_{t+1}(n+u-\mu)\right]P_\mu\right\}_T.$$

Обозначим $\varepsilon = \delta + \mu$ (с функцией распределения вероятности $\hat{Q}_\varepsilon$ как свертка P_μ и Q_δ), $\varepsilon \in [\hat{d}_{\min}, \hat{d}_{\max}]$.

Введем функцию $g(x) = E[R(x)] = \hat{c}_{\text{шт}} \sum\limits_{\varepsilon=\hat{d}_{\min}}^{x} (x-\varepsilon)\hat{Q}_\varepsilon + (c_{out} - \hat{c}_{\text{шт}}) \sum\limits_{\varepsilon=x}^{\hat{d}_{\max}} (\varepsilon - x)\hat{Q}_\varepsilon$, имеющую смысл условного математического ожидания целевой функции на периоде при условии, что сумма численности штатных сотрудников $n(t)$ и сделанных предложений о приеме на работу $u(t)$ равна x сотрудников.

Тогда для стационарного случая функциональные уравнения примут вид:

$$F_T(n) = \min_{u \geq 0}\{g(n+u)\}, \qquad (\text{П}.1)$$

$$F_{t-1}(n) = \min_{u \geq 0}\left\{g(n+u) + \gamma\sum_\mu F_t(n+u-\mu)P_\mu\right\}. \qquad (\text{П}.2)$$

В формуле (П.2) и ниже суммирование по μ предполагает один и тот же диапазон изменений μ, поэтому для упрощения записи пределы суммы опущены.

Исследуем свойства функции $g(x)$. Из определения можно получить более удобные выражения для функции $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} (c_{out} - \hat{c}_{\text{шт}})(\bar{d} + \bar{\mu} - x) \text{ при } x < \hat{d}_{\min}, \\ (c_{out} - \hat{c}_{\text{шт}})(\bar{d} + \bar{\mu} - x) + c_{out}\sum\limits_{\varepsilon=\hat{d}_{\min}}^{x}(x-\varepsilon)\hat{Q}_\varepsilon \\ \text{при } \hat{d}_{\min} \leq x < \hat{d}_{\max}, \\ \text{или } \hat{c}_{\text{шт}}(x - \bar{d} - \bar{\mu}) + c_{out}\sum\limits_{\varepsilon=x}^{\hat{d}_{\max}}(\varepsilon - x)\hat{Q}_\varepsilon \\ \text{при } \hat{d}_{\min} \leq x < \hat{d}_{\max}, \\ c_{\text{шт}}(x - \bar{d} - \bar{\mu}) \text{ при } \hat{x} \geq \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Первые разности $g(x)$ имеют вид $\Delta g(x) = g(x) - g(x-1) = -(c_{out} - \hat{c}_{\text{шт}}) + c_{out}\sum\limits_{\varepsilon=\hat{d}_{\min}}^{x}\hat{Q}_\varepsilon$, а вторые — $\Delta^2 g(x) = c_{out}\hat{Q}_x$. Они отрицательны (равны — $(c_{out} - \hat{c}_{\text{шт}})$) при $x \leq \hat{d}_{\min}$ и положительны (равны $\hat{c}_{\text{шт}}$) при $x \leq \hat{d}_{\max}$.

Так как вторые разности всегда неотрицательны $\Delta^2 g(x) = c_{out}\hat{Q}_x > 0$, то $\Delta g(x)$ монотонно возрастает и меняет знак единожды, поэтому $g(x)$ имеет единственный минимум. Точку минимума x_{g_opt} (где $\Delta g(x)$ меняет знак) найдем с помощью следующего правила.

Последовательно увеличивая x на единицу, начиная от $\hat{d}_{\min}$, найдем x_1 такое, что $\sum\limits_{\varepsilon=\hat{d}_{\min}}^{x_1-1}\hat{Q}_\varepsilon \leq \alpha_{\text{шт}\_out} = 1 - \hat{c}_{\text{шт}}/c_{out}$, а $\sum\limits_{\varepsilon=\hat{d}_{\min}}^{x_1}\hat{Q}_\varepsilon \geq \alpha_{\text{шт}\_out}$, тогда $x_{g\_opt} = \arg\{\min_T\{g(x_1-1); g(x_1)\}\}$. Фактически x_{g_opt} является (приближенным значением) $\alpha_{\text{шт}\_out}$ — квантилем распределения суммы величин потребности δ и трафика μ. Символически это правило будем обозначать как $x_{g\_opt} = \Psi(\alpha_{\text{шт}\_out}, \hat{Q}_\varepsilon)$.

Рассмотрим уравнение (П.1), в силу свойств $g(x)$

$$F_T(n) = \begin{cases} g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } n \leq x_{g_{opt}},\ u = x_{g_{opt}} - n, \\ g(n) \text{ при } n > x_{g\_opt},\ u = 0. \end{cases} \qquad (\text{П}.3)$$

Рассмотрим уравнение (П.2) для $F_{T-1}(n)$:

$$F_{T-1}(n) = \min_{u \geq 0}\left\{g(n+u) + \gamma\sum_\mu F_T(n+u-\mu)P_\mu\right\}.$$

Введем функцию $h_T(x) = \sum\limits_\mu F_T(x-\mu)P_\mu$, тогда $F_{T-1}(n) = \min_{u \geq 0}\{g(n+u) + \gamma h_T(n+u)\}$ и проанализируем ее поведение на разных интервалах области определения.

При $x \le x_{g\_opt}$ $h_T(x) = g(x_{g\_opt}) = \text{const}$.

Оценим первые разности $\Delta h_T(x)$ при $x > x_{g\_opt}$:

$$\Delta h_T(x) = \sum_\mu F_T(x - \mu)P_\mu - \sum_\mu F_T(x - 1 - \mu)P_\mu = \\ = \sum_\mu \Delta F_T(x - \mu)P_\mu.$$

В силу свойств функции $g(x)$ и выражений (П.3) первые разности ΔF_T всегда неотрицательны, поэтому разности $\Delta h_T(x)$ также неотрицательны, поэтому функция $h_T(x)$ монотонно неубывающая при $x > x_{g\_opt}$:

$$h_T(x) = \begin{cases} g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } x \le x_{g_{opt}}, \\ g(x) - f(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ c_{\text{шт}}(x - \bar{d} - 2\bar{\mu}) \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}, \end{cases}$$

где $f(x)$ — некоторая функция, монотонно возрастающая на отрезке $[x_{g_{opt}};\ \hat{d}_{\max}]$ от 0 до $\hat{c}_{\text{шт}}\ \bar{\mu}$.

Тогда

$$g(x) + \gamma h_T(x) =$$

$$= \begin{cases} g(x) + \gamma g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } x \le x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \gamma f(x) \text{при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \gamma \hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}, \end{cases}$$

т. е. сумма $g(x) + \gamma h_T(x)$ монотонно убывает при $x \le x_{g\_opt}$ и монотонно растет при $x > x_{g\_opt}$, и тогда

$$F_{T-1}(n) =$$

$$= \begin{cases} (1+\gamma)g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } n \le x_{g_{opt}},\ u = x_{g_{opt}} - n, \\ g(n) + \gamma h_T(x) \text{ при } n > x_{g_{opt}},\ u = 0, \end{cases}$$

$$F_{T-1}(x) = \begin{cases} (1+\gamma)g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \gamma f(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \gamma \hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Утверждения про свойства функций $F_t(n)$ и $h_t(n)$ могут быть последовательно доказаны методом математической индукции для любого $t < T$, уменьшая t, переходя $t + 1 \to t$.

Для функции $h_{T-1}(x) = \sum_\mu F_{T-1}(x - \mu)P_\mu$ справедливы соображения, высказанные для $h_T(n)$, это было проверено выше, поэтому:

$$h_{T-1}(x) =$$

$$= \begin{cases} (1+\gamma)g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } x \le x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \bar{\bar{f}}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma)g(x) - \gamma \hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} - (1+\gamma)\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

где $\bar{\bar{f}}(x)$ — некоторая функция, монотонно возрастающая на отрезке $[x_{g\_opt};\ \hat{d}_{\max}]$ от 0 до $(1 + 2\gamma)\hat{c}_{\text{шт}}\ \bar{\mu}$.

Теперь для суммы $g(x) + \gamma h_{T-1}(x)$ можно записать:

$$g(x) + \gamma h_{T-1}(x) =$$

$$= \begin{cases} g(x) + \gamma(1+\gamma)g(x_{g_{opt}}) = \text{const при } x \le x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma+\gamma^2)g(x) - \gamma\bar{\bar{f}}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma+\gamma^2)g(x) - \gamma(1+2\gamma)\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Обозначим $\Gamma_k = \sum_{i=0}^{k} \gamma^i = (1 - \gamma^{k+1})/(1 - \gamma)$, $\Delta_k = \sum_{i=1}^{k} i\gamma^{i-1} = \gamma^{k-1} + \dfrac{1-\gamma^{k-1}}{(1-\gamma)^2} - \dfrac{(k-1)\gamma^k}{1-\gamma}$, тогда

$$g(x) + \gamma h_{T-1}(x) =$$

$$= \begin{cases} \Gamma_2 g(x_{g\_opt}) = \text{const при } x \le x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_2 g(x) - \gamma\bar{\bar{f}}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_2 g(x) - \gamma\Delta_2\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Получим:

$$F_{T-2}(x) = \begin{cases} \Gamma_2 g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_2 g(x) - \gamma\bar{\bar{f}}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_2 g(x) - \gamma\Delta_2\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Пусть:

$$F_{T-n}(x) = \begin{cases} \Gamma_n g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_n g(x) - \gamma\tilde{f}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_n g(x) - \gamma\Delta_n\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

где $\tilde{f}(x)$ — некоторая функция, монотонно возрастающая на отрезке $[x_{g\_opt};\ \hat{d}_{\max}]$ от 0 до $\Delta_n\hat{c}_{\text{шт}}\ \bar{\mu}$.

Так как $h_{T-n}(x) = \sum_\mu F_{T-n}(x - \mu)P_\mu$, то

$$h_{T-n}(x) = \begin{cases} \Gamma_n g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_n g(x) - \tilde{f}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_n g(x) - (\gamma\Delta_n + \Gamma_n)\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Преобразуем $\gamma\Delta_n + \Gamma_n = \sum_{i=0}^{n} i\gamma^i + \sum_{i=0}^{n} \gamma^i = \sum_{i=0}^{n} (i + 1)\gamma^i = \sum_{i=0}^{n+1} i\gamma^{i-1} = \Delta_{n+1}$.

Тогда

$$g(x) + \gamma h_{T-n}(x) =$$
$$= \begin{cases} g(x) + \gamma\Gamma_n g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ (1+\gamma\Gamma_n)g(x) - \gamma\tilde{f}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g\_opt}, \\ (1+\gamma\Gamma_n)g(x) - \gamma\Delta_{n+1}\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

В результате получим:

$$F_{T-(n+1)}(x) = \begin{cases} \Gamma_{n+1}g(x_{g_{opt}}) \text{ при } x \le x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_{n+1}g(x) - \gamma\tilde{f}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \Gamma_{n+1}g(x) - \gamma\Delta_{n+1}\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Тогда из логической цепочки математической индукции последует, что для любого $t \le T$ справедливо:

$$F_t(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\gamma^{T-t+1}}{1-\gamma}g(x_{g_{opt}}) \text{ при } n \le x_{g_{opt}}, \\ \dfrac{1-\gamma^{T-t+1}}{1-\gamma}g(n) - \gamma\tilde{f}(x) \text{ при } \hat{d}_{\max} > x > x_{g_{opt}}, \\ \dfrac{1-\gamma^{T-t+1}}{1-\gamma}g(n) - \gamma\left(\sum\limits_{i=0}^{T-t} i\gamma^{i-1}\right)\hat{c}_{\text{шт}}\bar{\mu} \text{ при } x \ge \hat{d}_{\max}. \end{cases}$$

Из выражения для $F_t(n)$ можно легко получить оптимальное значение целевой функции $F_t(x_{g_{opt}}) = \dfrac{1-\gamma^{T-t+1}}{1-\gamma}g(x_{g_{opt}})$, а для стационарного случая ($T \to \infty$) в виде $F_\infty(x_{g_{opt}}) = \dfrac{1}{1-\gamma}g(x_{g_{opt}})$.

Функции $F_t(n)$ не представляют самостоятельного интереса, однако выражения для $F_t(n)$ позволяют сформировать стратегию оптимального управления для стационарного случая:

$$u_{opt}(n) = \begin{cases} x_{g\_opt} - n \text{ при } n < x_{g_{opt}}, \\ 0 \text{ при } n \ge x_{g_{opt}}, \end{cases}$$

где значение x_{g_opt} получено из описанного выше правила $x_{g\_opt} = \Psi(\alpha_{\text{шт}\_out}, \hat{Q}_\varepsilon)$, а $\alpha_{\text{шт}\_out} = 1 - \hat{c}_{\text{шт}}/c_{out}$.

П.2. Решение функциональных уравнений интервальной задачи

Функциональные уравнения Беллмана интервальной задачи имеют вид:

$$F_T(n) =$$
$$= \min_{u \ge 0}\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-,\, \tilde{\mu}_+];\ \delta \in [\tilde{\delta}_-,\, \tilde{\delta}_+]}\{R(n + u - \mu - \delta)\},$$

$$F_t(n) = \min_{u \ge 0}\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-,\, \tilde{\mu}_+];\ \delta \in [\tilde{\delta}_-,\, \tilde{\delta}_+]}\{R(n + u - \mu - \delta) + \gamma F_{t+1}(n + u - \mu)\}. \quad (\text{П.4})$$

Рассмотрим первое из уравнения (П.4).

Обозначим $R_{<\mu,\delta>}(x) = \max\limits_{z \in [\tilde{e}_-,\, \tilde{e}_+]}\{R(x - z)\}$. В силу линейности $R(\cdot)$ на полуосях функция $R_{<\mu,\delta>}(\cdot)$ также будет кусочно-линейной и иметь вид[5]:

$$R_{<\mu,\delta>}(x) = \begin{cases} c_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-) \\ \text{при } x \ge x_{<\mu,\delta>} = (1-\alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{e}_+ + \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{e}_-, \\ (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{e}_+) \text{ при } x \le x_{<\mu,\delta>}. \end{cases}$$

Тогда, учитывая равенство $F_T(n) = \min_{u \ge 0}\{R_{<\mu,\delta>}(n+u)\}$, получим

$$F_T(x) =$$
$$= \begin{cases} c_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-) \\ \text{при } x \ge x_{<\mu,\delta>}, \\ R_{s<\mu,\delta>} = \hat{c}_{\text{шт}}(1 - \alpha_{\text{шт}_{out}})(\tilde{e}_+ - \tilde{e}_-) \text{ при } x \le x_{<\mu,\delta>}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим второе из уравнений (П.4) при $t = T - 1$.

$$F_{T-1}(n) = \min_{u \ge 0}\max_{\mu,\,\delta}\{R(n + u - \mu - \delta) + \gamma F_T(n + u - \mu)\} =$$
$$= \min_{u \ge 0}\{\max_\mu\{\max_\delta\{R(n + u - \mu - \delta)\} + \gamma F_T(n + u - \mu)\}.$$

Введем функцию $R_{<\delta>}(x) = \max_{z \in [\tilde{\delta}_-,\, \tilde{\delta}_+]}\{R(x - z)\}$, тогда

$$F_{T-1}(n) = \min_{u \ge 0}\{\max_\mu\{R_{<\delta>}(n + u - \mu) + \gamma F_T(n + u - \mu)\}\}.$$

Для $R_{<\delta>}(x)$ справедливы все замечания относительно функции $R_{<\mu,\delta>}(x)$, поэтому:

$$R_{<\delta>}(x) = \begin{cases} \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) \\ \text{при } x \ge x_{<\delta>} = (1-\alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{\delta}_+ + \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{\delta}_-, \\ (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+) \text{ при } x \le x_{<\delta>}. \end{cases}$$

Так как все граничные значения процессов μ и δ неотрицательны, то[6] $x_{<\mu,\delta>} \ge x_{<\delta>} \ge 0$.

Обозначим сумму функций $R_{<\delta>}(x) + \gamma F_T(x)$ как $A_T(x)$ и получим выражение для нее:

$$A_T(x) = \begin{cases} (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_{<\delta>}, \\ \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_{<\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma\hat{c}_{\text{шт}}(x - e_-) \text{ при } x_{<\mu,\delta>} \le x. \end{cases}$$

Тогда уравнение для $F_{T-1}(n)$ примет вид: $F_{T-1}(n) = \min_{u \ge 0}\{\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-,\, \tilde{\mu}_+]}\{A(n + u - \mu)\}\}$.

---

[5] При $x \ge x_s$ выполняется $R(x - \tilde{e}_-) \ge R(x - \tilde{e}_+)$, поэтому $R^*(x - \tilde{e}_-) = \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-)$, аналогично при $x \le x_s$ — $R(x - \tilde{e}_+) \ge R(x - \tilde{e}_-)$, поэтому $R^*(x) = R(x - \tilde{e}_+) = (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{e}_-)$. Значение x_s находим из $\hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-) = (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{e}_-)$.

[6] $x_{<\mu,\delta>} = (1 - \alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{e}_+ + \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{e}_- \ge (1 - \alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{\delta}_+ + \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{\delta}_- = x_{<\delta>}$.

Получим выражение для $\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]}\{A(n + u - \mu)\}$:

$$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]}\{A_T(x - \mu)\} = $$

$$= \begin{cases} (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+ - \tilde{\mu}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_1, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{\delta}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_1 \le x \le x_2, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{\delta}_-) + \gamma \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{e}_-) \text{ при } x_2 \le x, \end{cases}$$

$$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]}\{A_T(x - \mu)\} = $$

$$= \begin{cases} (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{e}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_1, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_1 \le x \le x_2, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{e}_-) \text{ при } x_2 \le x. \end{cases}$$

Так как функция при $x \le x_1$ и $x_1 \le x$ полностью совпадает с функцией $R_{<\mu,\delta>}(x)$, то точка x_1 совпадет с точкой $x_{<\mu,\delta>}$.

Далее,

$$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]}\{A_T(x - \mu)\} = $$

$$= \begin{cases} (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{e}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le x_2, \\ (1+\gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma \hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- \text{ при } x_2 \le x. \end{cases}$$

Эта функция достигает минимума — в точке $x_{<\mu,\delta>}$, и он равен $(1 + \gamma)R_{s<\mu,\delta>}$.

Из уравнения $\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} = (1 + \gamma)\hat{c}_{шт} \times (x - \tilde{e}_-) - \gamma \hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_-$ найдем точку $x_2 = \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}$.

Тогда

$$F_{T-1}(n) = $$

$$= \begin{cases} (1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}, \\ (1+\gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma \hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- \text{ при } \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>} \le x. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$F_{T-2}(n) = \min_{u \ge 0}\left\{\max_{\mu}\left\{\max_{\delta}\{R(n + u - \mu - \delta)\} + \gamma F_T(n + u - \mu)\right\}\right\} = \min_{u \ge 0}\{\max_\mu\{R_{<\delta>}(n + u - \mu) + \gamma F_T(n + u - \mu)\}\}.$$

Обозначим $R_{<\delta>}(x) + \gamma F_{t+1}(x) = A_{T-1}(x)$,

$$A_{T-1}(x) = $$

$$= \begin{cases} (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+) + \gamma(1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x \le x_{<\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma(1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} \text{ при } x_{<\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma^2 R_{s<\mu,\delta>} \\ \text{при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma(1+\gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma^2\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- \\ \text{при } \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>} \le x. \end{cases}$$

Функция $A_{T-1}(x) = A_T(x) + \gamma^2 R_{s<\mu,\delta>}$ при $x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}$.

Покажем методом математической индукции, что для всех $0 < i \le T$ выполняется $A_{T-i}(x) = A_T(x) + \aleph(i)$ при $x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}$, где $\aleph(i)$ — некоторая функция, зависящая от γ, i и $R_{s<\mu,\delta>}$, но не зависящая от x.

Для $i = 1$ соотношение получено выше.

Пусть для некоторого $1 < i \le T$

$$A_{T-i}(x) = $$

$$= \begin{cases} (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) \text{ при } x \le x_{<\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) \text{ при } x_{<\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \aleph(i) \\ \text{при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma(1+\gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma^2\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- \\ \text{при } \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>} \le x. \end{cases}$$

Тогда:

$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]} A_{T-i}(x - \mu) = (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+ - \tilde{\mu}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) = (\hat{c}_{шт} - c_{out})(x - \tilde{e}_+) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i)$ при $x \le x_{<\mu,\delta>}$;

$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]} A_{T-i}(x - \mu) = \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{\delta}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) = \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i)$ при $x_{<\mu,\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>} + \tilde{\mu}_-$;

$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]} A_{T-i}(x - \mu) = \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\mu}_- - \tilde{\delta}_-) + \gamma\hat{c}_{шт} \times (x - \tilde{\mu}_- - \tilde{e}_-) + \aleph(i) = (1 + \gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- + \aleph(i)$ при $x_{<\mu,\delta>} + \tilde{\mu}_- \le x \le x_{<\mu,\delta>} + 2\tilde{\mu}_-$;

$\max_{\mu \in [\tilde{\mu}_-, \tilde{\mu}_+]} A_{T-i}(x - \mu) = \hat{c}_{шт}(x - \tilde{\delta}_- - \tilde{\mu}_-) + \gamma(1 + \gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_- - \tilde{\mu}_-) - \gamma^2\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- = (1 + \gamma + \gamma^2)\hat{c}_{шт} \times (x - \tilde{e}_-) - \gamma(1 + \gamma)\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- - \gamma^2\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- = (1 + \gamma + \gamma^2) \times \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma(1 + 2\gamma)\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_-$ при $x_{<\mu,\delta>} + 2\tilde{\mu}_- \le x$.

Так как $F_{T-(i+1)}(x) = \min_{u \ge 0}\{A_i(n + u)\}$, то

$$F_{T-(i+1)}(x) = $$

$$= \begin{cases} (1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) \text{ при } x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) + \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i) \\ \text{при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>} + \tilde{\mu}_-, \\ (1+\gamma)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- + \aleph(i) \\ \text{при } x_{<\mu,\delta>} + \tilde{\mu}_- \le x \le 2\tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}, \\ (1+\gamma+\gamma^2)\hat{c}_{шт}(x - \tilde{e}_-) - \gamma(1+2\gamma)\hat{c}_{шт}\tilde{\mu}_- \\ \text{при } \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>} \le x; \end{cases}$$

$$A_{T-(i+1)}(x) = R_{<\delta>}(x) + \gamma F_{T-(i+1)}(x).$$

Таким образом, получим:

$$A_{T-(i+1)}(x) = \\ = \begin{cases} (\hat{c}_{\text{шт}} - c_{out})(x - \tilde{\delta}_+) + \gamma[(1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i)] \\ \text{при } x \le x_{<\delta>}, \\ \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma[(1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i)] \\ \text{при } x_{<\delta>} \le x \le x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma\hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-) + \aleph(i) \\ \text{при } x_{<\mu,\delta>} \le x \le \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>}, \\ \hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{\delta}_-) + \gamma(1+\gamma)\hat{c}_{\text{шт}}(x - \tilde{e}_-) - \gamma^2\hat{c}_{\text{шт}}\tilde{\mu}_- \\ \text{при } \tilde{\mu}_- + x_{<\mu,\delta>} \le x. \end{cases}$$

Тогда $\gamma[(1+\gamma)R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i)] = \gamma R_{s<\mu,\delta>} + \aleph(i+1)$, преобразуем $\aleph(i+1) = \gamma^2 R_{s<\mu,\delta>} + \gamma\aleph(i)$ и $\aleph(i) = \gamma^2 R_{s<\mu,\delta>}\dfrac{1-\gamma^{i-1}}{1-\gamma}$. Это выражение позволяет получить минимаксное значение целевой функции $F_t(x_{<\mu,\delta>}) = \left(1 + \gamma + \gamma^2\dfrac{1-\gamma^{(T-t)-1}}{1-\gamma}\right) R_{s<\mu,\delta>}$, а для стационарного случая $F_\infty(x_{<\mu,\delta>}) = \dfrac{1}{1-\gamma} R_{s<\mu,\delta>}$.

Выражения для $A_t(x)$ и $F_t(x)$ позволяют получить минимаксную стратегию управления в условиях интервальной неопределенности, сформулируем ее. Величины n, u, μ и δ являются целочисленными, а значение $x_{<\mu,\delta>} = \alpha_{\text{шт}\_out}\tilde{e}_- + (1 - \alpha_{\text{шт}\_out})\tilde{e}_+$ может не быть целым. Поэтому найдем целое число x_{int}, обеспечивающее минимальное значение $A_t(x)$ на множестве целых x для всех t:

$$x_{int} = \arg\{\min_T\{A_t([x_{<\mu,\delta>}]), A_t([x_{<\mu,\delta>}] + 1)\}\}.$$

Тогда минимаксная стратегия получится в виде $u_{opt}(n) = \max_T\{0, x_{int} - n\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Smet A., Lund S., Schaninger W.* Organizing for the future. Platform-based talent markets help put the emphasis in human-capital management back where it belongs — on humans. January 2016. — URL: http://www.mckinsey.com/insights/organization/organizing_for_the_future (дата обращения 1.10.2016).
2. *Белов М.В.* Модель управления человеческим капиталом фирмы // Проблемы управления. — 2016. — № 5. — С. 24—34.
3. *Smith D.K.* Dynamic programming and inventory management: what has been learnt in the last generation? // Proceedings of the 1999 ISIR Workshop on Inventory Management. Exeter. — UK, 1999.
4. *Rao P.* A Dynamic Programming Approach to Determine Optimal Manpower Recruitment Policies // The Journal of the Operational Research Society. — 1990. — Vol. 41, iss. 10. — P. 983—988.
5. *Chen J.J., Zhu J.L., Zhang D.N.* Multi-project scheduling problem with human resources based on dynamic programming and staff time coefficient // Intern. Conf. on Management Science & Engineering / 21th Annual Conference Proceedings. — Helsinki, 2014. P. 1012—1018. — URL: http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6930339&isnumber=6930197 (дата обращения 1.10.2016).
6. *Silva L.C., Costa A.P.C.S.* Decision model for allocating human resources in information system projects // Intern. Journal of Project Management. — 2013. — Vol. 31. — P. 100—108.
7. *Elshafei M., Alfares H.K.* A dynamic programming algorithm for days-off scheduling with sequence dependent labor cost // Journal of Scheduling. — 2008. — Vol. 11, iss. 2. — P. 85—93. — URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10951-007-0040-x (дата обращения 1.10.2016).
8. *Xiea Y., Liua C., Wua D.,* et al. Dynamic programming based research position planning: Empirical analysis from the Chinese Academy of Sciences // Procedia Computer Science. — 2015. — Vol. 55. — P. 35—42.
9. *Si J., Barto A., Powell W.B. and Wunsch, D.* Approximate Dynamic Programming for High-Dimensional Resource Allocation Problems / in Handbook of Learning and Approximate Dynamic Programming. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2004. — doi: 10.1002/9780470544785.ch10.
10. *Nirmala S., Jeeva M.* A dynamic programming approach to optimal manpower recruitment and promotion policies for the two grade system // African Journal of Mathematics and Computer Science Research // December 2010. — Vol. 3, iss. 12. — P. 297—301.
11. *Mehlmann A.* An Approach to Optimal Recruitment and Transition Strategies for Manpower Systems Using Dynamic Programming // The Journal of the Operational Research Society. — 1980. — Vol. 31, N 11. — P. 1009—1015.
12. *Berovic D.P., Vinter R.B.* The Application of Dynamic Programming to Optimal Inventory Control // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, N 5. — P. 676—685.
13. *Ibrahim R., Armony M., Bassamboo A.* Does the Past Predict the Future? The Case of Delay Announcements in Service Systems // Management Science / Published online in Articles in Advance 13 Jun 2016. — URL: http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.2016.2425 (дата обращения 1.10.2016).
14. *Gans N.; Koole G., Mandelbaum A.* 2003 Telephone Call Centers: Tutorial, Review, and Research Prospe // Manufacturing & Service Operations Management. — 2003. — Vol. 5, N 2. — doi: 10.1287/msom.5.2.79.16071.
15. *Lee A.M., Longton P.A.* Queueing Processes Associated with Airline Passenger Check-in // Journal of the Operational Research Society. — 1959. — Vol. 10, iss. 1. — P. 56—71. — doi:10.1057/jors.1959.5.
16. *Espinosa E.D., Frausto J., Rivera E.J.* Markov Decision Processes for Optimizing Human Workflows // Service Science. — 2010. — Vol. 2, iss. 4. — P. 245—269. — URL: http://dx.doi.org/10.1287/serv.2.4.245 (дата обращения 1.10.2016).
17. *Badinelli R.* A Stochastic Model of Resource Allocation for Service Systems // Service Science. — 2010. — Vol. 2, iss. 1—2. — P. 76—91. — URL: http://dx.doi.org/10.1287/serv.2.1_2.76 (дата обращения 1.10.2016).
18. *Arts J., Basten R., Van Houtum G.-J.* Repairable Stocking and Expediting in a Fluctuating Demand Environment: Optimal Policy and Heuristics // Operations Research / Published online in Articles in Advance 01 Jun 2016. — URL: http://dx.doi.org/10.1287/opre.2016.1498 (дата обращения 1.10.2016).
19. *Flamholtz E.G., Geis G.T., Perle R.J.* A Markovian Model for the Valuation of Human Assets Acquired by an Organizational Purchase // Interfaces. — 1984. — Vol. 14, N 6. — P. 11—15.
20. *Cao H., Hu J., Jiang C., Kumar T.,* et al. On the Mark: Integrated Stochastic Resource Planning of Human Capital Supply Chains // Interfaces. — Vol. 41, N 5. — P. 414—435. — URL: http://dx.doi.org/10.1287/inte.1110.0596 (дата обращения 1.10.2016).
21. *Kumar P., Varaiya P.* Stochastic Systems: Estimation, Identification, and Adaptive Control. — New Jersey: Prentice Hall. Inc.; Englewood Gifts, 1986. — 358 p.
22. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 1989. — 263 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Белов Михаил Валентинович — канд. техн. наук,
зам. ген. директора, компания ИБС, г. Москва,
✉ mbelov59@mail.ru.