УДК 519.176

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ОБРАЗУЮЩИХ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ДИАМЕТР

Д.Л. Белоцерковский

Доказана теорема о перечислении обыкновенных графов с минимальным числом ребер, диаметр которых после удаления произвольной вершины или ребра не превосходит трех.

Ключевые слова: граф, степень вершины, смежность, лемма о рукопожатиях, минимальное число ребер, диаметр, операция дублирования.

ВВЕДЕНИЕ

Задача синтеза топологии сети передачи данных (СПД) является частью общей задачи топологической оптимизации сети, которая представляет собой наиболее сложную задачу, решаемую в процессе топологического проектирования [1, 2].

Показано, что для решения задачи топологической оптимизации наиболее перспективным и адекватно представляющим оптимизируемую сеть является комбинаторный подход, предлагающий использовать терминологию и представления теории графов (используемые далее термины и определения можно найти в работе [3]). Вершина графа соответствует узлу коммутации, а ребро — линии связи. Компьютерной сети ставится в соответствие обыкновенный граф.

Синтезируемая сеть должна удовлетворять следующим ограничениям по надежности:

— длина кратчайшего маршрута между любой парой узлов коммутации не должна превышать заданной величины d_1 (это значит, что диаметр графа, соответствующего синтезируемой сети, не превосходит d_1);

— длина кратчайшего маршрута между любой парой узлов коммутации при отказе любого узла или линии связи в основном маршруте не должна превышать заданной величины $d_2 \geqslant d_1$ (это значит, что диаметр графа, соответствующего синтезируемой сети, после удаления из него произвольной вершины или ребра не превосходит d_2 [1]).

Необходимо найти такую схему соединения узлов коммутации между собой (топологическую структуру сети), которая имеет наименьшую стоимость при выполнении ограничений на надежность.

Показано [4], что такая задача является *NP*-трудной. Следовательно, для сужения множества допустимых решений следует несколько упростить указанную задачу. Такое упрощение позволит получить рациональные модели построения сетей, которые могут быть полезны для экспертов, создающих СПД.

Некоторые из таких моделей рассмотрены в предлагаемой статье.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, содержащий $n = |V|$ вершин и $m = |E|$ ребер [3].

Простой цепью называется такой маршрут между двумя вершинами, что любая вершина встречается в нем только один раз. Длина простой цепи равна числу ребер в ней.

Расстоянием $d(\nu_1, \nu_2)$ между вершинами ν_1 и ν_2 называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины ν_1 и ν_2.

Диаметром графа $d(G)$ называется максимум среди всех расстояний между любой парой вершин графа G.

Граф двусвязен, если существуют две непересекающиеся простые цепи между любыми двумя вершинами.

Степенью $\deg \nu$ вершины ν называется число ребер, инцидентных вершине ν. В дальнейшем будем пользоваться важным утверждением, известным как лемма о рукопожатиях: сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер [3].

Две вершины называются смежными, если они соединены ребром.

Подграф G' графа G называется остовным, если $V(G') = V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Искомая СПД может быть представлена некоторым графом $G = (V, E)$, вершины V которого соответствуют узлам коммутации, а ребра E — линиям связи. Пусть $d(G - e)$ и $d(G - \nu)$ — диаметры графа $G - e$, полученного из графа G удалением ребра e, и графа $G - \nu$, полученного из графа G удалением вершины ν. Ребрам графа G приписаны неотрицательные веса, равные стоимости аренды каналов между парой соответствующих узлов коммутации. Под стоимостью $C(G)$ графа G понимается сумма весов входящих в G ребер. Обозначим: X — множество всех остовных подграфов графа G, $\bar{G}$ — произвольный остовный подграф графа G.

Задача создания (синтеза) топологической структуры СПД на языке теории графов формулируется следующим образом.

Найти такой остовной подграф G' графа G, что

$$C(G') = \min_{\bar{G} \in X} \{C(\bar{G})\} \quad (1)$$

при условиях:

$$d(G') \leqslant d_1, \quad (2)$$

$$d(G' - e) \leqslant d_2 \text{ для любого ребра } e \in E, \quad (3)$$

$$d(G' - \nu) \leqslant d_2 \text{ для любой вершины } \nu \in V. \quad (4)$$

Показано [5], что такая задача является NP-трудной. Для упрощения задачи будем считать стоимость всех ребер графа G одинаковой и равной, допустим, 1. Тогда задача (1)—(4) сводится к задаче теории экстремальных графов: определить минимальное число ребер в графах, удовлетворяющих условиям (2)—(4), и найти графы с таким числом ребер. Эта задача решена для некоторых фиксированных значений d_1 и d_2 (см. например, работы [6, 7]).

В частности, практический интерес представляет случай $d_2 \leqslant 3$ (такое ограничение использовалось при создании модификаций автоматизированной системы бронирования авиабилетов «Сирена» [8]). Обозначим $G(n, 3)$ — множество графов с n вершинами, для которых выполнены условия (2)—(4) при $d_1 \leqslant d_2 \leqslant 3$, и $E(n, 3)$ — нижнюю границу числа ребер во множестве графов $G(n, 3)$. В работе [6] доказана следующая важная теорема.

Теорема 1. *$E(n, 3) = 2n - 4$ при $4 \leqslant n \leqslant 7$, $E(n, 3) = 2n - 5$ при $8 \leqslant n \leqslant 23$, $E(n, 3) = 2n - 6$ при $n \geqslant 24$.* ♦

В настоящей статье разработан метод, позволяющий перечислить все графы, на которых достигаются указанные в теореме значения $E(n, 3)$ при $4 \leqslant n \leqslant 7$. С помощью перечисленных графов указан простой способ построения других графов из множества $G(n, 3)$, содержащих $2n - 4$ ребра, при $n > 7$. Все найденные в статье графы имеют весьма простую структуру и могут использоваться как модели оптимальной топологической структуры СПД.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Из теоремы 1 следует, что экстремальные графы из множества $G(n, 3)$ при $4 \leqslant n \leqslant 7$ содержат $2n - 4$ ребра.

Предложение 1. Минимальная степень w вершины в экстремальном графе G равна двум.

Доказательство. Так как граф G двусвязен, то $w \geqslant 2$. Воспользуемся леммой о рукопожатиях: $\sum_{i=1}^{n} \deg \nu_i = 4n - 8 \geqslant wn$. Следовательно, $w \leqslant 4 - 8/n$ и так как $n \leqslant 7$, то $w < 3$ и $w = 2$. ♦

Пусть $B = (V_B, E_B)$, $n_B = |V_B|$, $m_B = |E_B|$ — подграф экстремального графа G, порожденный вершинами степени не менее трех (далее на всех рисунках подграф B выделен жирно). Пусть T — множество вершин графа G степени два и $|T| = n_T$. Из предложения 1 следует, что T не пусто и $n_T \geqslant 1$.

На рис. 1, *б* изображен граф из множества $G(5, 3)$ с $2n - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$ ребрами. Штрихами изображена операция дублирования вершины из множества T, которая приводит к новому графу $G(6, 3)$ с $2n - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ ребрами. Далее операцию добавления новой вершины степени два к графу из множества $G(n, 3)$, не изменяющую подграф B и приводящую к тому, что новый граф принадлежит множеству $G(n + 1, 3)$, будем называть *операцией дублирования*. С помощью операции дублирования можно получать серии графов из множества $G(n, 3)$ (см. также рис. 1, *в*).

Рассмотрим граф G из множества $G(n, 3)$ с $2n - 4$ ребрами, в котором определен подграф $B = (V_B, E_B)$. Удалим произвольную вершину ν из множества T. Получим подграф $G' = G - \nu$ с подграфом $B' = (V'_B, E'_B)$. Граф G назовем *образующим*, если выполнено хотя бы одно из условий: подграф подграфу $G' \notin G(n - 1, 3)$; подграф B' не изоморфен подграфу B. Поиск образующих графов заметно упростит задачу перечисления экстремальных графов. Из образующего графа легко полу-

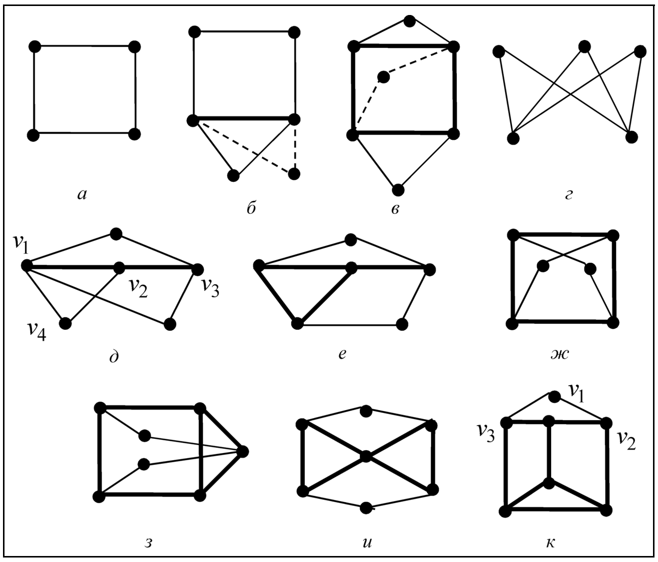

Рис. 1. Образующие графы, удовлетворяющие условиям теоремы 2: *а* — простой цикл с 4-мя вершинами; *б* — единственный образующий граф с двумя смежными вершинами степени два; *в* — первый образующий граф с 6-ю вершинами, для которого $n_B = 4$; *г* — образующий граф с 5-ю вершинами, для которого $n_B = 2$, $n_T = 3$; *д* — образующий граф с 5-ю вершинами, для которого $n_B = 3$, $n_T = 3$; *е* — второй образующий граф с 6-ю вершинами, для которого $n_B = 4$; *ж* — третий образующий граф с 6-ю вершинами, для которого $n_B = 4$; *з* — первый образующий граф с 7-ю вершинами, для которого $n_B = 5$, $n_T = 2$; *и* — второй образующий граф с 7-ю вершинами, для которого $n_B = 5$, $n_T = 2$; *к* — образующий граф с 7-ю вершинами, для которого $n_B = 6$, $n_T = 1$

чить несколько новых экстремальных графов, воспользовавшись операцией дублирования. Поиск образующего графа основан на «конструировании» подграфа B, являющегося «скелетом» экстремального графа, с последующим добавлением к нему вершин из множества T. Заметим также, что граф, полученный из образующего графа с помощью операции дублирования, не является образующим. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Подмножество образующих графов множества* $G(n, 3)$ *при* $4 \leqslant n \leqslant 7$ *состоит из 10-ти графов, изображенных на рис. 1.*

Доказательство. Вначале отметим, что при $n = 4$ существует единственный двусвязный граф с 4-мя ребрами — это простой цикл (см. рис. 1, *а*). Это единственный экстремальный граф из множества $G(4, 3)$. В дальнейшем будем рассматривать $n \geqslant 5$. Доказательство теоремы будет состоять в поиске образующих графов при $5 \leqslant n \leqslant 7$. Для удобства разделим поиск на два взаимоисключающих случая: 1) в графе имеются хотя бы две смежные вершины степени два; 2) в графе нет смежных вершин степени два.

Случай 1. Пусть в искомом образующем графе G имеются смежные вершины v_1 и v_2 степени два (рис. 2). Смежные им вершины v_3 и v_4 не совпадают, так как в случае, если $v_3 = v_4$, то после удаления вершины v_3 граф $G - v_3$ несвязен и $d(G - v_3) = \infty$, что противоречит условию $d(G - n_3) \leqslant d_2 \leqslant 3$. Если в графе G удалить ребро v_1v_3, то для выполнения условия $d(v, v_1) \leqslant d_2 \leqslant 3$, для любого $v \in G$, следует смежность вершины v_4 всем вершинам графа, кроме v_4. Если в графе G удалить ребро v_2v_4, то аналогично можно показать смежность вершины v_3 всем вершинам графа, кроме v_2. Таким образом, вершины v_3 и v_4 смежны, и граф G выглядит так, как это указано на рис. 2. Заметим, что вершинам v_3 и v_4 инцидентно $n - 2 + n - 3 = 2n - 5$ ребер (ребро v_3v_4 посчитали один раз). Если еще учесть ребро v_1v_2, то в графе уже имеется $2n - 4$ ребра и, следовательно, других ребер, кроме перечисленных выше, нет. Так как мы ищем образующий граф, в котором нет вершин степени два, полученных с помощью операции дублирования, то единственный образующий граф для случая 1 изображен на рис. 1, *б*. Остальные графы, изображенные на рис. 1, *в* — *к*, найдены при рассмотрении случая 2.

Случай 2. Здесь в образующих графах нет смежных вершин степени два. Это означает, что всякая вершина степени два смежна двум различным вершинам степени не менее трех. Но вершины степени не менее трех порождают подграф B. Таким образом, этот подграф содержит не менее двух вершин, и $n_B \geqslant 2$. Так как $n_T \geqslant 1$ и $n \leqslant 7$, то $n_B \leqslant n - n_T \leqslant 6$. Докажем предложение 2, определяющее число ребер в подграфе B.

Предложение 2. $m_B = 2n_B - 4$.

Доказательство. Число ребер $m = 2n - 4$ в графе G можно записать в виде суммы числа ребер в подграфе B и ребер, инцидентных вершинам степени два из множества T:

$$m = m_B + 2n_T = 2n - 4 \Rightarrow m_B = 2(n - n_T) - 4 = \\ = 2n_B - 4. \blacklozenge$$

Дальнейшее рассмотрение случая 2 будет проведено для каждого из возможных вариантов: $n_B = 2, 3, 4, 5, 6$ в отдельности.

Пусть $n_B = 2$. Из предложения 2 следует, что $m_B = 2 \cdot 2 - 4 = 0$.

Применим лемму о рукопожатиях, записав в качестве слагаемых сумму степеней вершин подграфа B и вершин из множества T:

$$\sum_{v \in G} \deg v = \sum_{v \in B} \deg v + \sum_{v \in T} \deg v = 2m = 4n - 8.$$

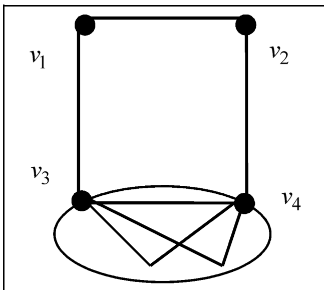

Рис. 2. Искомый образующий граф с двумя смежными вершинами степени два

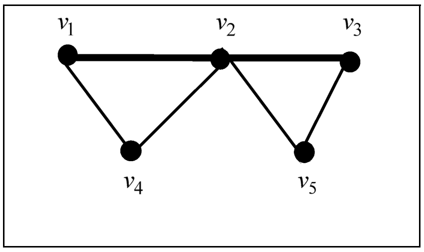

Рис. 3. К анализу смежности в искомом образующем графе, для которого $n_B = 4$

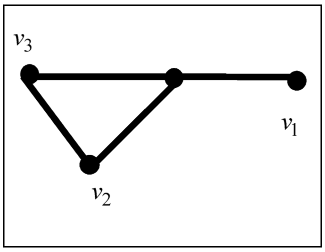

Рис. 4. Первый из возможных подграфов *B* для случая $n_B = 4$

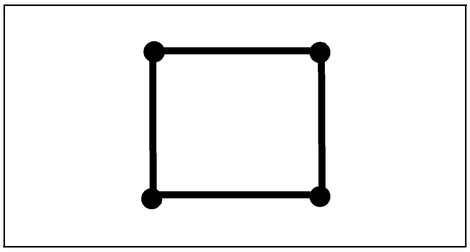

Рис. 5. Второй из возможных подграфов *B* для случая $n_B = 4$

Учтем также, что $\sum_{\nu \in B} \deg \nu \geqslant 3n_B$ и $\sum_{\nu \in T} \deg \nu = 2n_T$:

$$3n_B + 2n_T = 3 \cdot 2 + 2n_T \leqslant 4n - 8 = \\ = 4(2 + n_T) - 8 \Rightarrow n_T \geqslant 3.$$

Следовательно, получаем образующий граф из множества $G(n, 3)$, для которого $n_B = 2$, $n_T = 3$ (рис. 1, *г*). Любые графы из множества $G(n, 3)$, для которых $n_B = 2$, $n_T > 3$, получены из графа на рис. 1, *г* с помощью операции дублирования и не являются образующими.

Пусть $n_B = 3n$. Из предложения 2 следует, что $m_B = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. Поэтому подграф *B* представляет собой простую цепь, состоящую из двух ребер. Рассмотрим все вершины подграфа *B*: две конечные вершины ν_1 и ν_3 и среднюю вершину ν_2. Предположим, в графе имеются вершина ν_4 степени два, смежная вершинам ν_2 и ν_1, и вершина ν_5 степени два, смежная вершинам ν_2 и ν_3 (рис. 3). Удалим вершину ν_2. Заметим, что в полученном графе $G - \nu_2$ имеем $d(\nu_4, \nu_5) > 3$, что противоречит условию $d_2 \leqslant 3$. Следовательно, подграф, изображенный на рис. 3, в искомом образующем графе не существует. Так как $\deg \nu_2 \geqslant 3$, то, не уменьшая общности, считаем, что имеется смежная ν_2 вершина степени два, например, ν_4, смежная также вершине ν_1. Тогда существуют две вершины степени два, смежные вершинам ν_1 и ν_3, и получаем образующий граф, изображенный на рис. 1, *д*.

Пусть $n_B = 4$. Из предложения 2 следует, что в подграфе *B* имеются 4 ребра. Следовательно, существуют два возможных подграфа *B* (рис. 4 и 5). Нам следует выяснить смежность вершин степени два с вершинами подграфа *B*, представленными на рис. 4 и 5.

На рис. 4 изображены вершины подграфа *B*: ν_1, которая смежна не менее чем с двумя вершинами степени 2, а также ν_2 и ν_3, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной степени два. Следовательно, $n_T \geqslant 2$. На рис. 1, *е* представлен образующий граф, в котором подграфом *B* является граф, изображенный на рис. 4. В подграфе *B*, представленном на рис. 5, каждая вершина смежна хотя бы с одной вершиной степени два, и снова получаем $n_T \geqslant 2$. Таким образом, подграф *B* на рис. 5 порождает два образующих графа, изображенных на рис. 1, *в* и *ж*.

Пусть $n_B = 5$. Из предложения 2 следует, что в подграфе *B* имеются 6 ребер. Определим число вершин степени два в искомом образующем графе, снова воспользовавшись леммой о рукопожатиях:

$$\sum_{\nu \in G} \deg \nu = 4n - 8 = 4(5 + n_T) - 8 \geqslant 3n_B + 2n_T = \\ = 3 \cdot 5 + 2n_T \Rightarrow 2n_T \geqslant 3 \Rightarrow n_T \geqslant 2.$$

Так как $n \leqslant 72$ и $n_B = 5$, то $n_T = 2$. Выясним, каков вид подграфа *B*. Обозначим: $\deg_B \nu$ — степень вершины ν в подграфе *B*, *t* — число вершин из множества *T*, смежных вершине ν. Так как $\deg \nu \geqslant 3$, $n \in B$, то $\deg \nu = \deg_B \nu + t \geqslant 3$. Воспользуемся тем, что $t \leqslant n_T = 2$. Тогда $\deg_B \nu \geqslant 3 - t \geqslant 1$. Это означает, что в подграфе *B* нет изолированных вершин.

На рис. 6 представлены все возможные варианты подграфа *B* (т. е. любой подграф *B* будет изоморфен изображенному на рис. 6 подграфу). Для каждого из подграфов *B* существует единственный вариант построения графа *G*, являющегося «кандидатом» в искомые образующие графы (см. рис. 1, *з* и *и*, 6, *а—в*). Графы, изображенные на рис. 1, *з* и *и*, являются образующи-

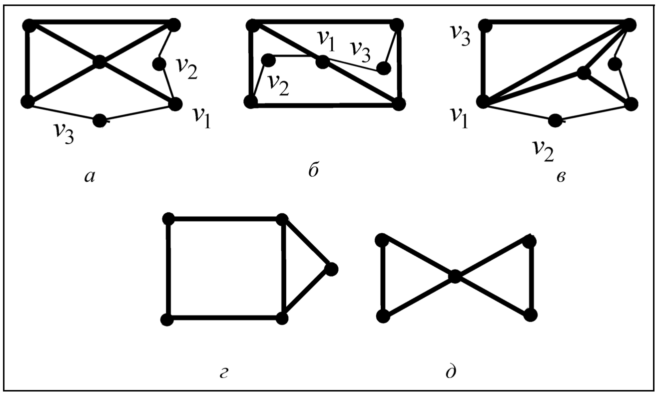

Рис. 6. Варианты построения кандидатов в образующие графы и возможные подграфы *B*:
а — первый кандидат в искомые образующие графы для случая $n_B = 5$; *б* — второй кандидат в искомые образующие графы для случая $n_B = 5$; *в* — третий кандидат в искомые образующие графы для случая $n_B = 5$; *г* — первый из возможных подграфов *B* для случая $n_B = 5$; *д* — второй из возможных подграфов *B* для случая $n_B = 5$

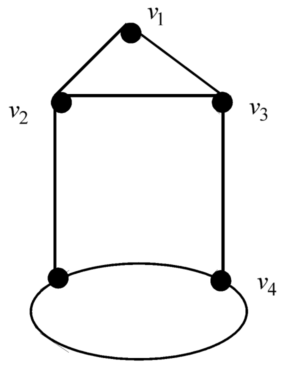

Рис. 7. Возможный образующий граф для случая $n_B = 6$

ми. Графы, изображенные на рис. 6, *а—в*, не принадлежат множеству $G(7, 3)$. Действительно, удалив вершину ν_1, получим $d(\nu_2, \nu_3) > 3$ и $d_2 > 3$.

Пусть $n_B = 6$. Так как $n_T > 0$ и $n \leqslant 7$, то $n_T = n - n_B = 1$. Снова воспользуемся леммой о рукопожатиях для того, чтобы определить степени вершин в графе G: $\sum\limits_{\nu \in G} \deg \nu \geqslant 3n_B + 2n_T = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 20$. С другой стороны, $\sum\limits_{\nu \in G} \deg \nu = 4n - 8 = 4 \cdot 7 - 8 = 20$. Следовательно, $\sum\limits_{\nu \in G} \deg \nu = 3n_B + 2n_T$. Итак, в искомом графе все вершины из подграфа B имеют степень три. Так как $\deg \nu = \deg_B \nu + t = 3$ и $t \leqslant 1$, то $\deg_B \nu \geqslant 2$ для любой вершины $\nu \in B$. Следовательно, $2 \leqslant \deg_B \nu \leqslant 3$. Установим число вершин степени два и степени три в подграфе B. Пусть n_2 и m_3 — число вершин соответственно степени два и три в подграфе B. Из предложения 2 следует, что $m_B = 2n_B - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Применяя лемму о рукопожатиях, получаем $2n_2 + 3n_3 = 2m_B = 2 \cdot 8 = 16$. Так как $n_2 + n_3 = n_B = 6$, то $2n_2 + 3n_3 = 2(n_2 + n_3) + n_3 = 2 \cdot 6 + n_3 = 16$. Откуда $n_3 = 4$ и $n_2 = n_B - n_3 = 6 - 4 = 2$. Итак, в подграфе B четыре вершины степени три и две вершины степени два. Так как в графе G всего лишь одна вершина ν_1 степени 2, а в подграфе B — две вершины степени 2, значит, вершина ν_1 должна быть смежна именно этим двум вершинам из подграфа B. Пусть ν_2 и ν_3 — вершины, для которых $\deg_B \nu_2 = \deg_B \nu_3 = 2$ и которые смежны с ν_1. Заметим, что для выполнения условия $d(\nu_1, \nu_2) \leqslant 3$ после удаления ребра $\nu_1\nu_2$ необходимо, чтобы в подграфе B расстояние между вершинами ν_2 и ν_3 не превосходило двух ребер. Учитывая все сказанное о подграфе B, получаем два графа, удовлетворяющих перечисленным ранее условиям (см. рис. 1, *к* и 7). Граф на рис. 1, *к* является образующим. Изучим подробнее граф на рис. 7. Удалим вершину ν_2. Для выполнения условия $d(\nu_1, \nu) \leqslant 3$, для любой вершины ν графа G, необходимо, чтобы вершине ν_4 были смежными все вершины графа $G - \nu_2$, кроме ν_1. Это означает, что $\deg \nu_4 = 4$. Но ранее мы показали, что любая вершина подграфа B имеет степень три. Таким образом, из графа на рис. 7 нельзя получить образующий граф.

Рассмотрение случая $n_B = 6$ завершает поиск образующих графов из множества $G(n, 3)$ при $5 \leqslant n \leqslant 7$. Таким образом, теорема 2 доказана. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все образующие графы при $5 \leqslant n \leqslant 7$ изображены на рис. 1, *б—к*. Если требуется построить некоторый граф из множества $G(n, 3)$, содержащий $n > 7$ вершин и $2n - 4$ ребра, то можно взять любой образующий граф и с помощью операции дублирования добавить к нему нужное число вершин степени два.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.
2. *Жожикашвили В.А., Вишневский В.М.* Сети массового обслуживания. Теория и применения к сетям ЭВМ. — М.: Радио и связь, 1988. — 192 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 301 с.
4. *Plesniak J.* The complexity of designing a network with minimum diameter // Networks. — 1981. — Vol. 11. — P. 77—85.
5. *Рейнгольд Э., Нивергельдт Ю., Део М.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. — М.: Мир, 1980. — 476 с.
6. *Белоцерковский Д.Л.* Характеризация некоторых экстремальных графов с диаметром, не превосходящим трех // Дискретная математика — 1997. — Т. 9, вып. 1. — С. 134—146.
7. *Белоцерковский Д.Л.* Об одной задаче перечисления экстремальных графов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. — 1998. — Т. 5, № 2. — С. 3—27.
8. *Жожикашвили В.А., Вишневский В.М.* Сеть ЭВМ «Сирена»: проектирование и анализ / В кн.: 10-я Всесоюз. школа-семинар по вычислительным сетям: Тез. докл. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1985. — Ч. 3. — С. 377—382.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Белоцерковский Дмитрий Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доцент, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва,
☎ (499) 233-93-04, ✉ belozer68@mail.ru.