

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЕТА С МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

С.Г. Баженов, А.Н. Козьяйчев, В.С. Королев

Аннотация. В рамках частотного подхода рассмотрены методы исследования устойчивости многосвязных систем. Методы предусматривают: размыкание системы по одному контуру при замкнутых остальных и расчет передаточной функции разомкнутой системы; размыкание системы по всем сигналам выбранного сечения и решение уравнения потери устойчивости; определение собственных значений матрицы передаточных функций разомкнутой системы. Показано, что суть рассмотренных методов сводится к уравнению потери устойчивости, тем самым доказана их эквивалентность для расчета областей устойчивости. Применение методов продемонстрировано при расчете областей устойчивости магистрального самолета с комплексной системой управления в боковом канале, где в качестве органов управления служат элероны и руль направления и реализованы интегральные алгоритмы. Выявлена нелинейная зависимость передаточных функций, определяющих устойчивость замкнутой системы от коэффициентов усиления алгоритмов управления, что вносит неопределенность в понятия запасов по амплитуде и фазе для многосвязных систем.

Ключевые слова: многосвязная система, передаточная функция, разомкнутая система, матрица передаточных функций, область устойчивости, самолет, комплексная система управления.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время управление самолетами осуществляется с помощью цифровых бортовых вычислительных машин (БЦВМ). Внедрение БЦВМ позволило значительно расширить объем функций управления, реализуемых комплексной системой управления (КСУ), включая обеспечение оптимальных характеристик управляемости, ограничение предельных значений параметров полета и др. При этом используется много органов управления (руль высоты, стабилизатор, элероны, руль направления, интерцепторы), которые, кроме того, могут быть секционированы. Это делает систему «самолет — КСУ» многосвязной, оценка устойчивости которой вызывает определенные сложности. Характерным примером такого случая является анализ устойчивости самолета с КСУ в боковом кана-

ле, обеспечивающем управление по крену и курсу. Существует много различных методов анализа устойчивости многосвязных систем [1–7]. Это и модификации традиционных операторных методов, имеющие большое практическое значение, метод пространства состояний, применение которого затруднено высокой размерностью матрицы перехода [2–4], современные методы, основанные на функциональных нормах H_2 и H_∞ [4]. Для практики наибольший интерес представляют модификации традиционных методов, поскольку при этом сохраняется принятый в инженерной среде подход к исследованиям с помощью передаточных функций, частотных характеристик и запасов устойчивости. С другой стороны, необходимо знать границы применимости этих методов и понимать физический смысл полученных результатов, что и является целью данной работы.



1. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим различные методы исследования устойчивости на примере динамики самолета в боковом канале с КСУ, формирующей управляющие сигналы на элероны и руль направления с помощью сигналов обратной связи по углу скольжения, угловым скоростям крена и рыскания и углу крена, которые образуют фазовый вектор $\mathbf{y} = [\beta, \omega_x, \omega_y, \gamma]^T$, и вектор управляющих воздействий $\mathbf{u} = [\delta_3, \delta_n]^T$, где β и γ — углы скольжения и крена, ω_x и ω_y — угловые скорости крена и рыскания, δ_3 и δ_n — отклонения элеронов и руля направления.

В этом случае система операторных уравнений, описывающая динамику самолета, имеет вид:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_y \\ \omega_x \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{(\beta/\delta_n)}(s) & W_{(\beta/\delta_3)}(s) \\ W_{(\omega_y/\delta_n)}(s) & W_{(\omega_y/\delta_3)}(s) \\ W_{(\omega_x/\delta_n)}(s) & W_{(\omega_x/\delta_3)}(s) \\ W_{(\gamma/\delta_n)}(s) & W_{(\gamma/\delta_3)}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{W}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где $W_{(y_j/\delta_i)}(s)$ — передаточная функция между узлами графа, соответствующим сигналам управления δ_i и сигналам вектора состояния y_j .

Комплексная система управления описывается системой операторных уравнений:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(\delta_n/\beta)}(s) & D_{(\delta_n/\omega_y)}(s) & D_{(\delta_n/\omega_x)}(s) & D_{(\delta_n/\gamma)}(s) \\ D_{(\delta_3/\beta)}(s) & D_{(\delta_3/\omega_y)}(s) & D_{(\delta_3/\omega_x)}(s) & D_{(\delta_3/\gamma)}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_y \\ \omega_x \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{(\delta_n/X_n)}(s) & D_{(\delta_n/X_3)}(s) \\ D_{(\delta_3/X_n)}(s) & D_{(\delta_3/X_3)}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{D}^X\mathbf{X}, \quad (2)$$

где $D_{(\delta_i/y_j)}$ — передаточная функция от сигнала вектора состояния y_j до сигнала δ_i , X_3 и X_n — сигналы от летчика на отклонение элеронов и руля направления.

Аргументом функции $D_{(\delta_i/y_j)}$ в случае непрерывной системы является переменная s преобразования Лапласа. Далее этот аргумент будет опущен. В случае дискретной системы управления — переменная $z = e^{sT_0}$ дискретного преобразования Лап-

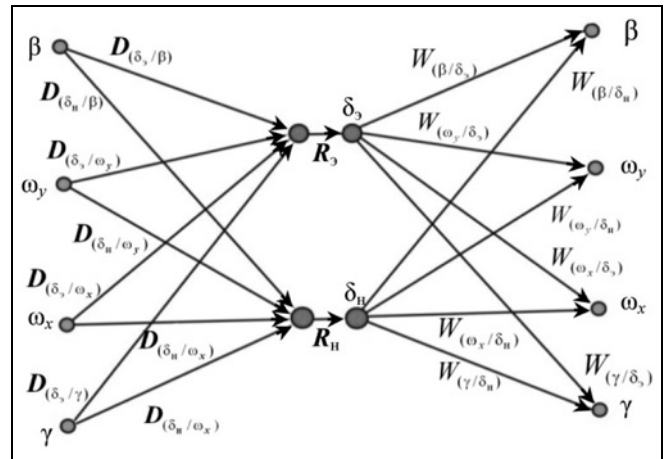


Рис. 1. Граф замкнутой системы «самолет — КСУ»

ласа [1—4]. Граф замкнутой системы «самолет — КСУ» приведен на рис. 1. Параметры R_3 и R_n представляют собой общие коэффициенты усиления в каналах элеронов и руля высоты. Их изменение касается всех контуров управления, где задействованы эти органы управления, поэтому их удобно применять в качестве осей областей устойчивости. Для анализа устойчивости необходимы только сигналы обратной связи, сигналы X_3 и X_n в выражении (2) можно опустить. Устойчивость можно анализировать различными путями.

Наиболее распространены следующие методы:

- размыкание замкнутой системы по одному из управляющих сигналов при замкнутом контуре второго сигнала, после чего применяется традиционный метод;

- размыкание системы по всем сигналам выбранного сечения (управляющие сигналы \mathbf{u} , вектор пространства состояний \mathbf{y}); после этого составляется матричное уравнение границы устойчивости в операторной форме и определяется его решение;

- размыкание системы по всем сигналам выбранного сечения (управляющие сигналы \mathbf{u} , вектор пространства состояний \mathbf{y}); после этого анализируются собственные значения и вектора матрицы передаточных функций разомкнутой системы.

Оценим достоинства и недостатки каждого из этих методов и рассмотрим, как согласуются результаты, полученные с их помощью.

1.1. Анализ устойчивости при размыкании системы по набору сигналов

Рассмотрим, каким образом анализируется устойчивость при размыкании системы по всем управляющим сигналам. Получим выражение для передаточной функции, определяющей устойчивость замкнутой системы. Подставляя из уравнения (1) в уравнение (2) выражение для вектора состояния

$y = [\beta, \omega_x, \omega_y, \gamma]^T$ и опуская сигналы X_H и X_Δ , получим уравнение состояния:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_H \\ \delta_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(\delta_H/\beta)} & D_{(\delta_H/\omega_y)} & D_{(\delta_H/\omega_x)} & D_{(\delta_H/\gamma)} \\ D_{(\delta_\Delta/\beta)} & D_{(\delta_\Delta/\omega_y)} & D_{(\delta_\Delta/\omega_x)} & D_{(\delta_\Delta/\gamma)} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} W_{(\beta/\delta_H)} & W_{(\beta/\delta_\Delta)} \\ W_{(\omega_y/\delta_H)} & W_{(\omega_y/\delta_\Delta)} \\ W_{(\omega_x/\delta_H)} & W_{(\omega_x/\delta_\Delta)} \\ W_{(\gamma/\delta_H)} & W_{(\gamma/\delta_\Delta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_H \\ \delta_\Delta \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{W}^u\mathbf{u},$$

где $W_{ij}^u = \sum_{k=1}^4 D_{ik} W_{kj}$ — элементы матрицы \mathbf{W}^u передаточных функций системы, разомкнутой по управляющим сигналам $\mathbf{u} = [\delta_\Delta, \delta_H]^T$.

Уравнение для определения границы устойчивости:

$$\det(\mathbf{E} - \mathbf{W}^u) = 0 \quad (3)$$

или в развернутом виде:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u \\ -W_{21}^u & 1 - W_{22}^u \end{bmatrix} = \\ = 1 - W_{11}^u - W_{22}^u - W_{11}^u W_{22}^u - W_{12}^u W_{21}^u = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим свойства уравнения (4).

- Уравнение носит нелинейный характер, что может оказать влияние на оценку запасов устойчивости по амплитуде и фазе. В частности, если топология контуров системы управления такова, что один и тот же коэффициент усиления присутствует в передаточных функциях W_{11}^u и W_{22}^u или W_{12}^u и W_{21}^u , то в уравнении (4) будет присутствовать квадрат этого коэффициента, что не позволяет применять обычный метод оценки запасов по амплитуде и фазе. Если одно и то же звено чистого запаздывания $e^{-s\tau}$ присутствует одновременно в упомянутых передаточных функциях, то в уравнении (4) будет присутствовать звено $e^{-2s\tau}$, что тоже искажает оценку запаса устойчивости.
- В случае, если $W_{12}^u = 0$ или $W_{21}^u = 0$, система распадается на две независимые подсистемы и уравнение (4) принимает вид: $1 - W_{11}^u - W_{22}^u + W_{11}^u W_{22}^u = (1 - W_{11}^u)(1 - W_{22}^u) = 0$, и устой-

чивость подсистем можно анализировать традиционным методом, решая уравнения

$$1 - W_{11}^u = 0, \quad 1 - W_{22}^u = 0. \quad (5)$$

В предлагаемом методе к исследованию много-связных систем управления вводится понятие передаточной функции, определяющей устойчивость замкнутой системы. Уравнение (3) может быть записано в форме:

$$W_{p.c}(s) = 1 - \det(\mathbf{E} - \mathbf{W}^u) = 1, \quad (6)$$

где $W_{p.c}(s)$ — передаточная функция, определяющая устойчивость замкнутой системы, которая является аналогом передаточной функции разомкнутой системы для одноконтурного случая. Для двумерного случая выражение этой передаточной функции принимает вид:

$$W_{p.c} = 1 - \det \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u \\ -W_{21}^u & 1 - W_{22}^u \end{bmatrix} = \\ = W_{11}^u + W_{22}^u - W_{11}^u W_{22}^u + W_{12}^u W_{21}^u.$$

Как уже отмечалось, уравнение потери устойчивости нелинейное, так как содержит слагаемые $W_{11}^u W_{22}^u$ и $W_{12}^u W_{21}^u$. На рис. 2 приведен пример прохождения сигналов, соответствующих нелинейной части передаточной функции. В частности, выражение для передаточной функции разомкнутой системы содержит слагаемое:

$$W_{12}^u W_{21}^u = (D_{(\delta_\Delta/\beta)} W_{(\beta/\delta_H)} + D_{(\delta_\Delta/\omega_y)} W_{(\omega_y/\delta_H)} + \\ + D_{(\delta_\Delta/\omega_x)} W_{(\omega_x/\delta_H)} + D_{(\delta_\Delta/\gamma)} W_{(\gamma/\delta_H)}) (D_{(\delta_H/\beta)} W_{(\beta/\delta_\Delta)} + \\ + D_{(\delta_H/\omega_y)} W_{(\omega_y/\delta_\Delta)} + D_{(\delta_H/\omega_x)} W_{(\omega_x/\delta_\Delta)} + D_{(\delta_H/\gamma)} W_{(\gamma/\delta_\Delta)}).$$

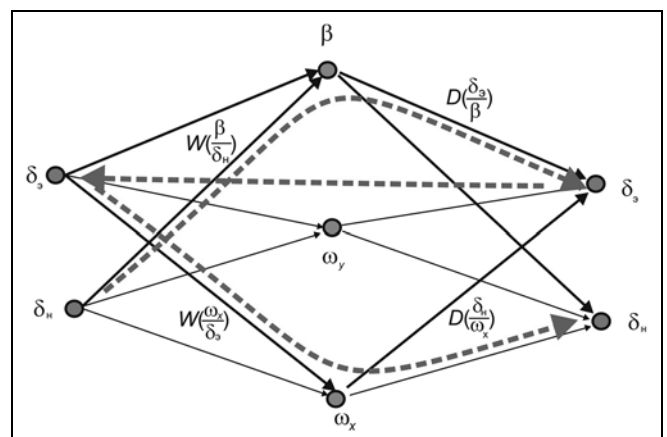


Рис. 2. Пример прохождения сигналов, соответствующий слагаемому нелинейной части передаточной функции



В него в числе прочих входит выражение: $D_{(\delta_H/\beta)} W_{(\beta/\delta_s)} D_{(\delta_s/\omega_x)} W_{(\omega_x/\delta_H)}$, которому соответствует приведенный на рис. 2 граф. Недостаток рассматриваемого метода состоит в неопределенности физического смысла полученной частотной характеристики. Если нарисовать частотную характеристику передаточной функции (6), то понять ее физический смысл достаточно сложно. Можно лишь определить наличие или отсутствие устойчивости замкнутой системы. Даже оценить запасы по амплитуде и фазе проблематично вследствие нелинейной зависимости (6) от параметров системы управления.

1.2. Анализ устойчивости при размыкании системы по одному сигналу сечения

В инженерной практике традиционным методом анализа устойчивости в случае использования нескольких органов управления является размыкание системы по одному органу управления при замкнутых каналах других органов и вычисление передаточной функции разомкнутой системы. После этого по частотной характеристике разомкнутой системы оцениваются запасы устойчивости по амплитуде и фазе, т. е. используется обычный метод оценки устойчивости. Рассмотрим структуру передаточной функции разомкнутой системы в случае размыкания системы по одному управляющему сигналу при замкнутом контуре по другому управляющему сигналу. Для определенности будем считать, что размыкание происходит по сигналу u_2 , тогда как контур, соответствующий сигналу u_1 , замкнут. Для передаточной функции разомкнутой системы можно получить выражение

$$W_{p.c} = W_{22}^u + \frac{W_{12}^u W_{21}^u}{(1 - W_{11}^u)}. \quad (7)$$

Для границы устойчивости имеем уравнение $W_{p.c} = 1$. Учитывая формулу (7), можно получить:

$$1 - W_{11}^u - W_{22}^u + W_{11}^u W_{22}^u - W_{12}^u W_{21}^u = 0. \quad (8)$$

Видно, что выражения (4) и (8) идентичны. Аналогичный результат получается при размыкании системы по сигналу u_1 . Таким образом, метод, использующий поканальное размыкание много-связной системы при замкнутых остальных контурах, позволяет корректно оценивать устойчивость замкнутой системы.

Обобщим данный результат на случай произвольной размерности. Пусть самолет с системой управления описывается системой уравнений

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}^u & W_{12}^u & \dots & W_{1n}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^u & W_{n2}^u & \dots & W_{nn}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1^{X_1} & \dots & W_1^{X_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_n^{X_1} & \dots & W_n^{X_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix}.$$

Уравнение границы устойчивости:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1n}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n1}^u & -W_{n2}^u & \dots & 1 - W_{nn}^u \end{bmatrix} = 0.$$

При размыкании системы по сигналу u_n при замкнутых остальных контурах

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}^u & W_{12}^u & \dots & W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n-1,1}^u & W_{n-1,2}^u & \dots & W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{1n}^u \\ \dots \\ W_{n-1,n}^u \end{bmatrix} u_n^*, \quad (9)$$

$$u_n = [W_{n,1}^u \dots W_{n,n-1}^u] \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + W_{n,n}^u u_n^*. \quad (10)$$

Из уравнения (9) получаем:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_{1n}^u \\ \dots \\ W_{n-1,n}^u \end{bmatrix} u_n^*.$$

Подставляя в уравнение (10), получаем:

$$u_n = [W_{n,1}^u \dots W_{n,n-1}^u] \times \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} W_{1n}^u \\ \dots \\ W_{n-1,n}^u \end{bmatrix} u_n^* + W_{n,n}^u u_n^*.$$

Таким образом, условие нахождения на границе устойчивости:

$$\begin{aligned}
 W_{p.c} = & [W_{n,1}^u \dots W_{n,n-1}^u] \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_{1n}^u \\ \dots \\ W_{n-1,n}^u \end{bmatrix} + \\
 & + W_{n,n}^u = 1. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Покажем, что выражения (3) и (11) эквивалентны. Равенство нулю определителя в выражениях (3) и (4) свидетельствует о том, что строки матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{W}^u$ линейно зависимы. Поскольку в выражении (11) присутствует обратная матрица алгебраического дополнения элемента W_{nn}^u , считаем, что она существует, т. е. первые $n - 1$ строк матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{W}^u$ линейно независимы. В этом случае n -я строка линейно зависима от остальных строк, т. е.:

$$\begin{aligned}
 & [-W_{n,1}^u \dots -W_{n,n-1}^u, 1 - W_{n,n}^u] = \\
 & = [c_1 \dots c_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n}^u \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов c_1, \dots, c_{n-1} рассмотрим первые $n - 1$ столбцов. Можно получить

$$\begin{aligned}
 [c_1 \dots c_{n-1}] = & [-W_{n,1}^u \dots -W_{n,n-1}^u] \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Линейная зависимость должна выполняться и для n -го столбца, т. е.:

$$1 - W_{n,n}^u = [c_1 \dots c_{n-1}] \begin{bmatrix} -W_{1n}^u \\ \dots \\ -W_{n-1,n}^u \end{bmatrix}.$$

Подставляя сюда выражение для коэффициентов c_1, \dots, c_{n-1} , получаем:

$$\begin{aligned}
 1 - W_{n,n}^u = & [W_{n,1}^u \dots -W_{n,n-1}^u] \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 1 - W_{11}^u & -W_{12}^u & \dots & -W_{1,n-1}^u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n-1,1}^u & -W_{n-1,2}^u & \dots & 1 - W_{n-1,n-1}^u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_{1n}^u \\ \dots \\ W_{n-1,n}^u \end{bmatrix}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что выражения (11) и (12) эквивалентны. Таким образом, и для случая произвольной размерности системы размыкание по отдельным контурам позволяет корректно определять границу устойчивости замкнутой системы.

1.3. Анализ устойчивости по собственным значениям матрицы передаточных функций разомкнутой системы

Возможен другой подход [1]. Граница устойчивости замкнутой системы определяется выполнением условия (3), т. е. равенством нулю определителя матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{W}^u(s)$, что происходит в случае равенства нулю одного или нескольких собственных значений этой матрицы, или, что то же, в случае равенства единице одного или нескольких собственных значений матрицы $\mathbf{W}^u(s)$. Таким образом, рассчитав собственные значения $\lambda_i(s)$, $i = 1, \dots, N$, матрицы $\mathbf{W}^u(s)$ и построив соответствующие частотные характеристики $\lambda_i(\omega)$, можно судить об устойчивости замкнутой системы. Найденные собственные значения можно назвать частотными характеристиками контуров, составляющих многосвязную систему,

$$W_i(\omega) = \lambda_i(\omega), \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Определив эти характеристики, можно оценить устойчивость многосвязной системы в целом, а также выделить контур, в котором система теряет устойчивость. Чтобы определить собственные значения матрицы $\mathbf{W}^u(s)$, необходимо решить уравнение

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} \lambda - W_{11}^u & -W_{12}^u \\ -W_{21}^u & \lambda - W_{22}^u \end{bmatrix} = & \lambda^2 - \lambda(W_{11}^u + W_{22}^u) + \\
 & + W_{11}^u W_{22}^u - W_{12}^u W_{21}^u = 0.
 \end{aligned}$$

В случае равенства единице собственного значения λ получаем уравнение:

$$1 - W_{11}^u - W_{22}^u + W_{11}^u W_{22}^u - W_{12}^u W_{21}^u = 0,$$

которое совпадает с выражением (4).

Для случая системы, где одна из перекрестных связей нулевая ($W_{12}^u = 0$ или $W_{21}^u = 0$) имеем собственные значения матрицы $\mathbf{W}^u(s)$ $\lambda_1 = W_{11}^u$, $\lambda_2 = W_{22}^u$ и условия границы устойчивости $W_{11}^u = 1$, $W_{22}^u = 1$, которые совпадают с условиями (5).



Еще одним важным и интересным вопросом является выбор сечения в графе прохождения сигналов, по которому производится размыкание системы. В самом деле, размыкание может быть проведено не только по сигналам вектора управления $\mathbf{u} = [\delta_3, \delta_H]^T$, но и по вектору состояния $\mathbf{y} = [\beta, \omega_x, \omega_y, \gamma]^T$. Имеем уравнение состояния:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{W}^X\mathbf{X} = \mathbf{W}^y\mathbf{y} + \mathbf{W}^X\mathbf{X}.$$

Устойчивость замкнутой системы определяется свойствами матрицы \mathbf{W}^y . Очевидно, что результаты, полученные при анализе устойчивости с помощью матриц \mathbf{W}^u и \mathbf{W}^y , должны совпадать, так как анализируется одна и та же система. Проанализируем собственные значения матрицы \mathbf{W}^y и сравним их с собственными значениями матрицы \mathbf{W}^u .

Для матриц \mathbf{W}^u и \mathbf{W}^y справедливы выражения

$$\mathbf{W}^u = \mathbf{D}\mathbf{W}, \quad \dim\mathbf{W}^u = [2 \times 2],$$

$$\mathbf{W}^y = \mathbf{W}\mathbf{D}, \quad \dim\mathbf{W}^y = [4 \times 4].$$

Матрицы \mathbf{W}^u и \mathbf{W}^y появляются в результате умножения матриц \mathbf{W} размерности $[4 \times 2]$ и \mathbf{D} размерности $[2 \times 4]$. Очевидно, что строки матрицы \mathbf{W} и столбцы матрицы \mathbf{D} линейно зависимы. Без нарушения общности можно считать, что первые две строки матрицы \mathbf{W} базисные. В этом случае матрицу \mathbf{W} можно представить в виде:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ c_{31}\mathbf{W}_1 + c_{32}\mathbf{W}_2 \\ c_{41}\mathbf{W}_1 + c_{42}\mathbf{W}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрицу \mathbf{D} представим в виде

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_2^T \quad \mathbf{D}_3^T \quad \mathbf{D}_4^T].$$

Матрица \mathbf{W}^y принимает вид:

$$\mathbf{W}^y = \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_1\mathbf{D}_1^T) & \mathbf{W}_1\mathbf{D}_2^T & \mathbf{W}_1\mathbf{D}_3^T & \mathbf{W}_1\mathbf{D}_4^T \\ \mathbf{W}_2\mathbf{D}_1^T & \mathbf{W}_2\mathbf{D}_2^T & \mathbf{W}_2\mathbf{D}_3^T & \mathbf{W}_2\mathbf{D}_4^T \\ c_{31}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_1^T + c_{32}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_1^T & c_{31}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_2^T + c_{32}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_2^T & c_{31}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_3^T + c_{32}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_3^T & c_{31}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_4^T + c_{32}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_4^T \\ c_{41}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_1^T + c_{42}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_1^T & c_{41}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_2^T + c_{42}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_2^T & c_{41}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_3^T + c_{42}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_3^T & c_{41}\mathbf{W}_1\mathbf{D}_4^T + c_{42}\mathbf{W}_2\mathbf{D}_4^T \end{bmatrix}.$$

Видно, что 3-я и 4-я строки являются линейной комбинацией двух первых строк, т. е. ранг матрицы \mathbf{W}^y равен или меньше двух. Поэтому, по меньшей мере, два собственных значения матрицы \mathbf{W}^y равны нулю. Определим значения оставшихся двух собственных значений. Пусть λ_i и \mathbf{v}_i — собственное значение и собственный вектор матрицы \mathbf{W}^u , т. е.

$$\mathbf{W}^u\mathbf{v}_i = \mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на матрицу \mathbf{W} :

$$\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{v}_i = \mathbf{W}^y\mathbf{W}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{W}\mathbf{v}_i.$$

Из полученного выражения следует, что λ_i — собственное значение, а $\mathbf{W}\mathbf{v}_i$ — собственный вектор матрицы \mathbf{W}^y . Таким образом, матрица \mathbf{W}^y имеет собственные значения, совпадающие со всеми собственными значениями матрицы \mathbf{W}^u , а оставшиеся собственные значения равны нулю. Значит, методы анализа устойчивости системы при размыкании по вектору состояния и по управляющим сигналам эквивалентны.

2. РАСЧЕТ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА С КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

Применим описанные методы анализа взаимосвязанных систем при расчете областей устойчивости современного магистрального самолета с КСУ в боковом канале [8, 9]. Рассматриваемый самолет представляет собой моноплан, выполненный по нормальной аэродинамической схеме со стреловидным крылом, палубным горизонтальным оперением и однокилевым вертикальным оперением. Самолет управляется элеронами, рулем высоты и рулем направления. Во всех каналах управления (продольном, путевом и поперечном) применяются интегральные законы управления. В попереч-

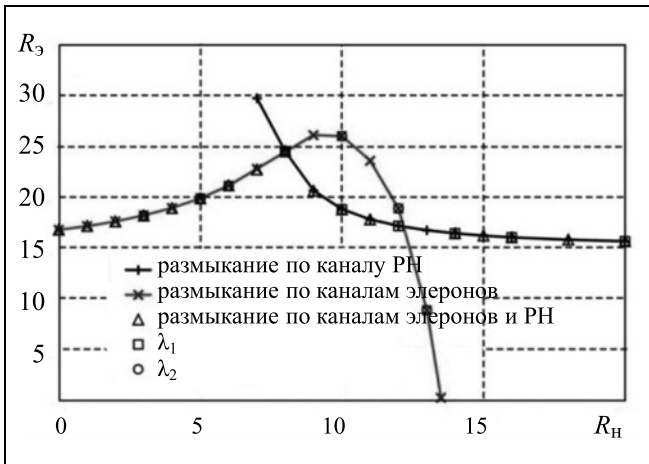


Рис. 3. Области устойчивости, рассчитанные разными методами: РН — руль направления

ном канале применяется интегральный закон управления угловой скоростью крена [8, 9] в виде

$$\delta_{\Theta} = K_{\Psi}^{\omega_x} \omega_{x3} + K_{\Pi}^{\omega_x} \left(\omega_x - \frac{\omega_{x3}}{T_{\Phi}^{\omega_{x3}} s + 1} \right) + K_{\text{И}}^{\omega_x} \left(\omega_x - \frac{\omega_{x3}}{T_{\Phi}^{\omega_{x3}} s + 1} \right),$$

где ω_{x3} и ω_x — заданная и текущая угловые скорости крена, $K_{\Psi}^{\omega_x}$, $K_{\Pi}^{\omega_x}$, $K_{\text{И}}^{\omega_x}$, $T_{\Phi}^{\omega_{x3}}$ — параметры закона управления угловой скоростью крена.

В путевом канале применяется интегральный закон управления углом скольжения, при котором перемещению педалей соответствует заданный угол скольжения [6, 8, 9]:

$$\delta_H = K_{\Psi}^{\beta} \beta_3 + K_{\Pi}^{\beta} \left(\beta - \frac{\beta_3}{T_{\Phi}^{\beta} s + 1} \right) + K_{\text{Д}}^{\beta} \dot{\beta} + K_{\text{И}}^{\beta} \left(\beta - \frac{\beta_3}{T_{\Phi}^{\beta} s + 1} \right),$$

где β_3 и β — заданный и текущий углы скольжения, K_{Ψ}^{β} , K_{Π}^{β} , $K_{\text{Д}}^{\beta}$, $K_{\text{И}}^{\beta}$, T_{Φ}^{β} — параметры закона управления углом скольжения.

На рис. 3 приведены границы устойчивости замкнутой системы «самолет — КСУ», граф которой приведен на рис. 1. В качестве осей приняты коэффициенты усиления в каналах руля направления и элеронов (см. рис. 1). Система устойчива при значениях коэффициентов ниже граничных

(в области под кривыми). При расчете областей устойчивости использовались:

— передаточная функция системы, разомкнутой по каналу руля направления, но замкнутой по каналам элеронов — см. выражение (7);

— передаточная функция системы, разомкнутой по каналам элеронов, но замкнутой по каналу руля направления — см. выражение (7);

— передаточная функция, определяющая устойчивость замкнутой системы — см. выражение (6);

— собственные значения матрицы передаточных функций разомкнутой системы — см. выражение (13) и соответствующие частотные характеристики.

Видно, что области устойчивости, рассчитанные с помощью разных методов, совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены модификации традиционных операторных методов применительно к исследованию устойчивости многосвязных систем. Показано, что рассмотренные методы оценки устойчивости дают одинаковые области устойчивости в пространстве параметров системы управления, но применение таких понятий, как запасы по амплитуде и фазе для анализа многосвязных систем может быть некорректным в связи с нелинейной зависимостью передаточной функции, определяющей устойчивость, от коэффициентов усиления. Анализ устойчивости при размыкании графа системы по сечениям разной размерности приводит к «мнимой» границе устойчивости в силу вырожденности матрицы передаточных функций разомкнутой системы. Применение методов продемонстрировано на примере анализа устойчивости самолета с комплексной системой управления, где в качестве органов управления служат руль направления и элероны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешин Б.С., Баженов С.Г., Диденко Ю.И., Шелюхин Ю.Ф. Системы дистанционного управления магистральных самолетов — М.: Наука, 2013. — 292 с. [Aleshin, B.S., Bazhenov, S.G., Didenko, Yu.I., Shelyukhin, Yu.F. Sistemy distantsionnogo upravleniya magistral'nykh samoletov. — M.: Nauka, 2013. — 292 s. (In Russian)]
2. Tou, J.T. Modern control theory. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1964. — 427 p.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. — М.: Физматлит, 2007. — Т. 2: Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — 440 с. [Kim, D.P. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. — M.: Fizmatlit, 2007. — Т. 2: Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy. — 440 s. (In Russian)]



4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Ранопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. — М.: Ленанд, 2019. — 504 с. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Rapoport, L.B. Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya. — M.: Lenand, 2019. — 504 s. (In Russian)]
 5. Fu Cun Qu. MIMO System Stability Margin and its Flight Test Method. — Advanced Materials Research. — Vol. 562—564. — August 2012. — URL: <https://www.scientific.net/AMR.562-564.1468>.
 6. Kim, Y., Seo, G. On stability margin of a LQR-based vehicle network // Proc. of the 30-th Congress ICAS. — Daejeon, Korea. Sept. 25—30, 2016.
 7. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Халикова Е.А. Анализ запасов устойчивости гомогенных многосвязных систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 4. — С. 4—12. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A., Khalikova, E.A. Analiz zapasov ustoichivosti gomogennykh mnog-osvyaznykh sistem upravleniya // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2009. — No. 4. — S. 4—12. (In Russian)]
 8. Диденко Ю.И., Козыичев А.Н. Интегральный закон управления угловой скоростью крена и углом крена магистрального самолета // Тез. докл. Девятого междунар. аэрокосмического конгресса IAC'18. — Москва, 2018. — С. 50, 51. [Didenko, Yu.I., Kozyaichev, A.N. Integral'nyi zakon upravleniya uglovoi skorost'yu krena i uglom krena magistral'nogo samoleta // Tez. dokl. Devyatogo mezhdunar. aehrokosmicheskogo kongressa IAC'18. — Moskva, 2018. — S. 50, 51. (In Russian)]
 9. Диденко Ю.И., Козыичев А.Н. Интегральный закон управления углом скольжения для магистрального самолета // Авиация и космонавтика—2018. Тез. докл. 17-й Междунар. конф. — Москва, 2018, — С. 27, 28. [Didenko, Yu.I., Kozyaichev, A.N. Integral'nyi zakon upravleniya uglom skol'zheniya dlya magistral'nogo samoleta // Aviatsiya i kosmonavtika—2018. Tez. dokl. 17-i Mezhdunar. konf. — Moskva, 2018. — S. 27, 28. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*
- Поступила в редакцию 18.06.2019. После доработки 6.12.2019, принята к публикации 9.12.2019.*
- Баженов Сергей Георгиевич** — д-р техн. наук,
✉ Sergey.bazhenov@tsagi.ru,
- Козыичев Андрей Николаевич** — мл. науч. сотрудник,
- Королев Владимир Степанович** — науч. сотрудник,
Центральный аэрогидродинамический институт
им. профессора Н.Е. Жуковского, г. Жуковский.

STABILITY ANALYSIS OF AIRPLANE WITH MIMO CONTROL SYSTEM BASED ON FREQUENCY METHODS

S.G. Bazhenov[#], A.N. Kozyaychev, V.S. Korolyov

Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russia

[#]✉ Sergey.bazhenov@tsagi.ru

Abstract. In the framework of frequency analysis various methods of stability analysis of airplane with MIMO control system are considered. They assume that control system is open for selected signal with other loops closed, or that system is open for all signals of selected loops and allow solving stability equation and calculating transfer functions matrix eigenvalues. It is shown that all methods deal with different forms of the same equation, and thus the equivalence of methods considered for calculating closed loop stability domains is proved. The application of methods is demonstrated for calculation of stability domains for airplane equipped with MIMO stability and control augmentation system in lateral motion that uses ailerons and rudder as control surfaces. It is shown that in case of MIMO system open loop transfer function that defines closed loop stability is nonlinear function of control system gains. It introduces uncertainty to concept of amplitude and phase margins.

Keywords: MIMO system, open loop transfer function, transfer functions matrix, stability margins, airliner, stability and control augmentation system.



Не забудьте подписаться!

Если Вы не успели подписаться на журнал «Проблемы управления», то подписку можно оформить через редакцию по льготной цене с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Позвоните по телефону (495) 330-42-66 или обратитесь по электронной почте ru@ipu.ru, и подписка будет оформлена за один день. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.