УДК 519.7

# КОНСТРУКТИВНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СОСТАВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В.Р. Барсегян

Рассмотрена математическая модель управления линейными составными системами, описываемыми на разных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для преемственности движения составных систем. Построен аналитический вид движения составных систем, исследованы свойства движения и геометрическая структура области достижимости. Сформулированы необходимое и достаточное условия вполне управляемости. Предложен метод решения задачи управления составными системами и способ решения задачи оптимального управления, сформулированы условия существования программного управления и движения.

**Ключевые слова:** составная система, вполне управляемость, оптимальное управление, область достижимости, условия преемственности движения.

## ВВЕДЕНИЕ

Решение многих прикладных задач и процессов управления, выбор программных траекторий и управления сводится к управлению составными системами.

Следуя работам [1, 2], составной будем называть динамическую систему, описываемую на разных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для стыковки траекторий.

Составные системы встречаются в различных прикладных задачах авиастроения, робототехники, электроэнергетики и др. Математическая модель составной системы возникает, в частности, при исследовании процессов управления с учетом взаимодействия объекта управления со средой в соответствии с некоторыми физическими законами, проявляющимися в дискретные моменты времени.

Составная система может быть получена также при кусочно-линейной аппроксимации сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому решение различных задач управления нелинейной динамической системой, таким образом, может быть аппроксимировано решениями аналогичных задач для составной системы.

Исследование и решение различных задач управления составными системами имеют важное теоретическое и прикладное значение, расширяют область применения соответствующей математической теории. В частности, в докладе [3] математические модели подобных систем, их поведение и вопросы управления. В работах [1, 2] приведены необходимые условия оптимальности составных систем. В статье [4] исследовано решение задачи оптимального управления линейными гибридными системами (в дискретном времени) с квадратичным критерием качества. Работа [5] посвящена качественному анализу кусочно-линейных динамических систем.

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых свойств движения составных систем, в частности, поиску явного аналитического вида движения, формулировке необходимого и достаточного условий вполне управляемости, разработке метода решения задачи управления линейными составными системами и способа решения задачи оптимального управления, а также формулировке условий существования программного управления и движения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим управляемую составную динамическую систему, движение которой на интервале времени $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$, $k = 1, ..., m$, описывается $n_k$-мерной системой

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)}. \qquad (1.1)$$

Здесь $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$, $x^{(k)}$ — фазовый вектор системы; $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 1, ..., m$, — матрицы параметров системы (модели объекта) размерностями $(n_k \times n_k)$ и $(n_k \times r_k)$ соответственно; $u^{(k)}(t)$ — $(r_k \times 1)$-вектор управляющих воздействий. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц $A_k(t)$ и $B_k(t)$ и компоненты вектор-столбцов $u^{(k)}(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что заданы промежуточные моменты времени $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$.

Пусть заданы начальное

$$x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)} \qquad (1.2)$$

и конечное

$$x^{(m)}(T) = x_T^{(m)} \qquad (1.3)$$

состояния системы.

Преемственность между составными системами (1.1) при $k = 1, ..., m$ (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий в промежуточные моменты времени $t_k$, $k = 1, ..., m - 1$:

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \alpha_k, \qquad (1.4)$$

где $E_k$ – $(n_{k+1} \times n_k)$-мерные, $F_k$ – $(n_{k+1} \times n_{k+1})$-мерные матрицы, а $\alpha_k$ – $(n_{k+1} \times 1)$-мерный вектор-столбец.

Предполагается, что матрицы $E_k$, $F_k$ и вектор $\alpha_k$ известны, а матрицы $F_k$ такие, что существуют обратные матрицы $F_k^{-1}$, т. е. $\det F_k \neq 0$.

Рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Требуется найти условия, при которых существуют программные управляющие воздействия $u^{(k)}(t)$, $k = 1, ..., m$, переводящие движения составной системы (1.1) $x^{(k)}(t)$ из начального состояния (1.2), при условии (1.4), в конечное состояние (1.3) на промежутке времени $[t_0, T]$, а также построить их. ♦

Пусть для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан некоторый критерий качества $æ[u]$, где $u$ — набор управляющих воздействий, т. е. $u = \{u^{(1)}(t), ..., u^{(k)}(t) | u^{(i)}(t) \in P_i, i = 1, ..., k\}$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Задачу оптимального управления для системы (1.1) с условиями (1.2)—(1.4) и критерием качества $æ[u]$ можно сформулировать следующим образом.

**Задача 2.** Требуется найти набор оптимальных управляющих воздействий $u^0(t) = \{u^{(1)0}(t), ..., u^{(m)0}(t)\}$, $t \in [t_0, T]$, который переводит движение системы (1.1) из начального состояния (1.2) при условии (1.4) в конечное состояние (1.3) и имеет наименьшее возможное значение критерия качества $æ[u^0]$.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

Для решения поставленных задач построим движение составной системы (1.1) с условиями (1.2). Для этого напишем решение системы (1.1) для промежутка времени $[t_0, t_1]$ в виде [6]

$$x^{(1)}(t) = X_1[t_0, t_1]x^{(1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_1[t, \tau]u^{(1)}(\tau)d\tau, \qquad (2.1)$$

а для моментов времени $t \geqslant t_k$, $k = 1, ..., m - 1$, представим его в виде

$$x^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]x^{(k+1)}(t_k) + \int_{t_k}^{t} H_{k+1}[t, \tau]u^{(k+1)}(\tau)d\tau, \qquad (2.2)$$

где $H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau]B_k[\tau]$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1) на промежутке времени $[t_{k-1}, t_k]$.

Учитывая условия преемственности составных систем, из уравнения (1.4) получим

$$x^{(k+1)}(t_k) = F_k^{-1}(\alpha_k - E_k x^{(k)}(t_k)). \qquad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) в решение (2.2), получаем

$$x^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\alpha_k - X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}E_k x^{(k)}(t_k) + \int_{t_k}^{t} H_{k+1}[t, \tau]u^{(k+1)}(\tau)d\tau. \qquad (2.4)$$

В формуле (2.4) при $k = 1$ и после подстановки выражения $x^{(1)}(t_1)$ из (2.1) получим

$$x^{(2)}(t) = X_2[t, t_1]F_1^{-1}\alpha_1 - X_2[t, t_1]F_1^{-1}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0) - X_2[t, t_1]F_1^{-1}E_1\int_{t_0}^{t_1}H_1[t_1, \tau]u^{(1)}(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t}H_2[t, \tau]u^{(2)}(\tau)d\tau.$$

Если в формуле (2.4) $k \geqslant 2$, то, записывая формулу (2.2) для предыдущей составной системы (т. е. для промежутка времени $[t_{k-1}, t_k]$), при $t = t_k$ будем иметь

$$x^{(k)}(t_k) = X_k[t_k, t_{k-1}]x^{(k)}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k}H_k[t_k, \tau]u^{(k)}(\tau)d\tau. \quad (2.5)$$

Из условия (1.4) получим

$$x^{(k)}(t_{k-1}) = F_{k-1}^{-1}(\alpha_{k-1} - E_{k-1}x^{(k-1)}(t_{k-1})). \quad (2.6)$$

Учитывая формулы (2.5) и (2.6), запишем выражение (2.4) в виде

$$x^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\alpha_k - X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}E_kX_k[t_k, t_{k-1}]F_{k-1}^{-1}\alpha_{k-1} + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}E_kX_k[t_k, t_{k-1}]F_k^{-1}E_{k-1}x^{(k-1)}(t_{k-1}) - X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}E_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}H_k[t_k, \tau]u^{(k)}(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u^{(k+1)}(\tau)d\tau.$$

Продолжая эту процедуру для предыдущих промежутков времени, с учетом условия преемственности составных систем, до достижения промежутка времени $[t_0, t_1]$ и учитывая начальное условие (1.2) для фазового состояния $x^{(k+1)}(t)$, получим следующее выражение:

$$x^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\Big\{(-1)^k\prod_{j=1}^{k-1}E_{k+1-j} \times X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}]F_{k-j}^{-1}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0) + (-1)^{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}E_{k+1-j}X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}]F_{k-j}^{-1}\alpha_1 + (-1)^{k-2}\prod_{j=1}^{k-2}E_{k+1-j}X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}] \times F_{k-j}^{-1}\alpha_2 + \ldots + \alpha_k\Big\} + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1} \times \Big\{(-1)^k\prod_{j=1}^{k-1}E_{k+1-j}X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}]F_{k-j}^{-1} \times E_1\int_{t_0}^{t_1}H_1[t_1, \tau]u^{(1)}(\tau)d\tau + (-1)^{k-1}\prod_{j=1}^{k-2}E_{k+1-j}X_{k+1-j} \times [t_{k+1-j}, t_{k-j}]F_{k-j}^{-1}E_2\int_{t_1}^{t_2}H_2[t_2, \tau]u^{(2)}(\tau)d\tau + \ldots + (-1)E_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}H_k[t_k, \tau]u^{(k)}(\tau)d\tau\Big\} + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u^{(k+1)}(\tau)d\tau.$$

Введя обозначения

$$W_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i}E_{k+1-j}X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}]F_{k-j}^{-1},$$

$$k = 2, 3, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

полученное выражение для фазового состояния $x^{(k+1)}(t)$ запишем в виде

$$x^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_i + (-1)^kW_i^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0)\Big] + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1} \times \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]u^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u^{(k+1)}(\tau)d\tau. \quad (2.7)$$

Здесь размерность матрицы $W_i^{(k)}$ равна $(n_{k+1}\times n_{k+1})$ и принято, что при $i = k$ $W_k^{(k)} = E$ — единичная матрица размерностью $(n_{k+1}\times n_{k+1})$.

Таким образом, имея начальное состояние $x^{(1)}(t_0)$ (1.2), условия стыковки (преемственности) фазовой траектории (1.4) и задавая управляющие воздействия $u^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, k$, с помощью формулы (2.7) можно определить фазовое состояние системы (1.1) для произвольного момента времени $t$ из любого промежутка времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, m$.

## 3. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

Формула (2.7) представляет явный аналитический вид движения составной системы (1.1). В силу ограниченности множеств $P_k$, $k = 1, ..., m$, из выражения (2.7) непосредственно следует, что решение $x^{(k)}(t)$ представляет собой действительный, абсолютно непрерывный $n_k$-мерный вектор на $R^{n_k}$ [7].

К качественным аспектам теории управления принадлежит понятие области (множества) достижимости управляемого движения. Эти множества тесно связаны с различными задачами управления и многие результаты теории управления можно получить, изучая геометрическую структуру области достижимости [8, 9].

Пусть имеем $u^{(k)}(t) \in P_k$, $k = 1, ..., m$ — набор управлений, определяемых на промежутках времени $[t_{k-1}, t_k]$.

Совокупность всех решений системы (1.1), которые имеют явный вид (2.7), обозначим через $X(t_0, x_0^{(1)}, t, \{t_i, u^{(i)}, E_i, F_i, \alpha_i | i = 1, 2, ..., k\})$.

**Определение.** Множество

$$K(t_0, x_0^{(1)}, \bar{t}\,) = \{x^{(k+1)}(\bar{t}\,) \in R^{n_{k+1}} | x^{(k+1)}(\cdot) \in X(t_0, x_0^{(1)}, t, \{t_i, u^{(i)}, E_i, F_i, \alpha_i | i = 1, 2, ..., k+1\})\}$$

будем называть областью достижимости составной системы (1.1) в момент времени $\bar{t} \in [t_k, t_{k+1}]$, отвечающей начальному условию (1.2), набору управлений $u^{(k)}(t) \in P_k$ и условию стыковки траекторий (1.3). ♦

Набор управления $u^{(k)}(t)$ составляют все управления $u^{(i)}(t) \in P_i$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., k$, т. е. $u^{(k)}(t) = \{u^{(1)}(t), ..., u^{(k)}(t) | u^{(i)}(t) \in P_i$ $i = 1, ..., k\}$.

Основные свойства области достижимости составной системы формулируются в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Область достижимости* $K(t_0, x_0^{(1)}, \bar{t}\,)$ *составной системы* (1.1) *является компактной, выпуклой и непрерывно зависит от* $\bar{t}$ *при* $\bar{t} \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, ..., m - 1$.

Доказательство. Для краткости записи множества достижимости, в ее обозначении будем опускать все величины, кроме конечного момента времени $\bar{t}$. Чтобы доказать, что область $K(\bar{t}\,)$ $\bar{t} \in [t_k, t_{k+1}]$ является компактным множеством покажем, что оно ограничено и замкнуто в $R^{n_{k+1}}$.

В силу ограниченности множеств $P_k$, $k = 1, ..., m$, из равенства (2.7) непосредственно следует ограниченность области достижимости $K(\bar{t}\,)$.

Чтобы доказать замкнутость множества $K(\bar{t}\,)$ в множестве $R^{n_{k+1}}$, покажем, что из любой последовательности точек $x_1^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, $x_2^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, ..., $x_j^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, ... в $K(\bar{t}\,)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной точке $\bar{x}(\bar{t}\,)$ в $K(\bar{t}\,)$.

Рассмотрим соответствующие решения $x_j^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, $j = 1, 2, 3, ...$, и наборы управлений $u_1^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, $u_2^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, ..., $u_j^{(k+1)}(\bar{t}\,)$, ...

Из равенства (2.7) имеем, что для всех $j = 1, 2, 3, ...$ справедливо

$$x_j^{(k+1)}(\bar{t}\,) = X_{k+1}[\bar{t}, t_k] F_k^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} W_i^{(k)} \alpha_i + (-1)^k W_1^{(k)} E_1 X_1[t_1, t_0] x^{(1)}(t_0) \right] + X_{k+1}[\bar{t}, t_k] F_k^{-1} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} W_i^{(k)} E_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_i[t_i, \tau] u_j^{(i)}(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{\bar{t}} H_{k+1}[\bar{t}, \tau] u_j^{(k+1)}(\tau) d\tau, \qquad (3.1)$$

где $u_j^{(i)}(\cdot) \in P_i$, $i = 1, 2, ..., k + 1$. Из слабой компактности множества $P_i$ [10] следует, что из последовательности наборов функций $\{u_j^{(i)}(\cdot), i = 1, ..., k + 1\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к набору функции $\bar{u}_j^{(i)}(\cdot) \in P_i$, $i = 1, 2, ..., k + 1$. Переходя к пределу по подходящей подпоследовательности индексов в выражении (3.1), получим

$$\bar{x}^{(k+1)}(\bar{t}\,) = X_{k+1}[\bar{t}, t_k] F_k^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} W_i^{(k)} \alpha_i + (-1)^k W_1^{(k)} E_1 X_1[t_1, t_0] x^{(1)}(t_0) \right] + X_{k+1}[\bar{t}, t_k] F_k^{-1} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} W_i^{(k)} E_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_i[t_i, \tau] \bar{u}^{(i)}(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{\bar{t}} H_{k+1}[\bar{t}, \tau] \bar{u}^{(k+1)}(\tau) d\tau. \qquad (3.2)$$

Равенство (3.2) означает, что $\bar{x}^{(k+1)}(\bar{t}\,) \in K(\bar{t}\,)$, т. е. следует замкнутость области достижимости составной системы.

Для доказательства выпуклости множества $K(\bar{t}\,)$ покажем, что отрезок

$$(1 - \lambda) x_{(1)}^{(k+1)}(\bar{t}\,) + \lambda x_{(2)}^{(k+1)}(\bar{t}\,), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

соединяющий две фазовые точки $x_{(1)}^{(k+1)}(\bar{t})$ и $x_{(2)}^{(k+1)}$, весь лежит в $K(\bar{t})$. Пусть $u_{(1)}^{(k+1)}(t)$ и $u_{(2)}^{(k+1)}(t)$ — два набора управлений, соответствующих решениям $x_{(1)}^{(k+1)}(\bar{t})$ и $x_{(2)}^{(k+1)}$. Определим набор управления $u_{\lambda}^{(k+1)}(t) \subset P_i$, $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, таким образом, чтобы для каждого промежутка времени $[t_{i-1}, t_i]$ имело место соотношение

$$u_{\lambda}^{(i)}(t) = (1-\lambda)u_{(1)}^{(i)}(t) + \lambda u_{(2)}^{(i)}(t), \quad i = 1, ..., k+1.$$

Движение $x_{\lambda}^{(k+1)}$, соответствующее набору управлений $\{u_{\lambda}^{(i)}(t),\ i = 1, ..., k+1\}$, имеет вид

$$x_{\lambda}^{(k+1)}(t) = X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_i + (-1)^k W_1^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0)\right] + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1} \times \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]u_{\lambda}^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u_{\lambda}^{(k+1)}(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$x_{\lambda}^{(k+1)}(t) = (1-\lambda)\left\{X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_i + (-1)^k W_1^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0)\right] + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1} \times \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]u_{(1)}^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u_{(1)}^{(k+1)}(\tau)d\tau\right\} + \lambda\left\{X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1} \times \left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_i + (-1)^k W_1^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0)\right] + X_{k+1}[t, t_k]F_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]u_{(2)}^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t}H_{k+1}[t, \tau]u_{(2)}^{(k+1)}(\tau)d\tau\right\},$$

и поэтому

$$x_{\lambda}^{(k+1)}(t) = (1-\lambda)x_{(1)}^{(k+1)}(\bar{t}) + \lambda x_{(2)}^{(k+1)}(\bar{t}),$$

т. е. $K(\bar{t})$ — выпуклое множество.

Теперь изучим зависимость множеств $K(\bar{t})$ от $\bar{t}$ при $\bar{t} \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, ..., m-1$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что расстояние между множествами $K(\bar{t})$ и $K(\bar{\bar{t}})$ становится меньше $\varepsilon$, как только $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta$. Здесь расстояние между множествами $K(\bar{t})$ и $K(\bar{\bar{t}})$ понимается по метрике Хаусдорфа [10].

Пусть $\tilde{u}(t) = \{\tilde{u}^{(i)} \in P_i,\ i = 1, ..., k+1\}$ — набор управлений, которому соответствует движение $\tilde{x}^{(k+1)}(t)$ составной системы (1.1).

Тогда для моментов времени $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ из промежутка $[t_k, t_{k+1}]$, вычисляя разность фазовых состояний $\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{\bar{t}}) - \tilde{x}^{(k+1)}(\bar{t})$ согласно формуле (2.7), получим

$$\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{\bar{t}}) - \tilde{x}^{(k+1)}(\bar{t}) = \{X_{k+1}[\bar{\bar{t}}, t_k] - X_{k+1}[\bar{t}, t_k]\} \times F_k^{-1}\left\{(-1)^k W_1^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_k + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i \times \int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]\tilde{u}^{(i)}(\tau)d\tau\right\} + \int_{t_k}^{\bar{\bar{t}}}H_{k+1}[\bar{\bar{t}}, \tau]\tilde{u}^{(k+1)}(\tau)d\tau - \int_{t_k}^{\bar{t}}H_{k+1}[\bar{t}, \tau]\tilde{u}^{(k+1)}(\tau)d\tau.$$

Поскольку матрицы $X_i[t, \tau]$ и $H_i[t, \tau]$, $i = 1, ..., k+1$, ограничены по норме, а интеграл есть непрерывная функция пределов интегрирования, то получим следующие оценки:

$$\left\|(-1)^k W_1^{(k)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}W_i^{(k)}\alpha_k + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}W_i^{(k)}E_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}H_i[t_i, \tau]\tilde{u}^{(i)}(\tau)d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{3C},$$

$$\|X_{k+1}[\bar{\bar{t}}, t_k] - X_{k+1}[\bar{t}, t_k]\| < C,$$

$$\left\|\int_{t_k}^{\bar{\bar{t}}}H_{k+1}[\bar{\bar{t}}, \tau]\tilde{u}^{(k+1)}(\tau)d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\|\int_{t_k}^{\bar{t}}H_{k+1}[\bar{t}, \tau]\tilde{u}^{(k+1)}(\tau)d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для заданного $\varepsilon > 0$ и $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta$, если $\delta$ выбрать достаточно малым, где $C$ — некоторая постоянная.

Таким образом, для $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta$ имеем

$$\|\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{\bar{t}}) - \tilde{x}^{(k+1)}(\bar{t})\| < \frac{\varepsilon}{3C}C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (3.3)$$

Пусть точка $\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{t}) \in K(\bar{t})$ соответствует набору управлений $\tilde{u}^{(k+1)}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$. Определим набор управлений $\tilde{u}^{(k+1)}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{\bar{t}}$ и пусть $\tilde{x}^{(k+1)}(t)$ будет соответствующим ему решением, тогда $\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{\bar{t}}) \in K(\bar{\bar{t}})$ и имеет место неравенство (3.3). С другой стороны, если $\tilde{x}^{(k+1)}(\bar{\bar{t}}) \in K(\bar{\bar{t}})$, соответствующее набору управлений $\tilde{u}^{(k+1)}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{\bar{t}}$, то, определяя набор управлений на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, получим выражение (3.3).

Приведенные рассуждения показывают, что расстояние между множествами $K(\bar{t})$ и $K(\bar{\bar{t}})$ меньше ε, как только $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta$, где δ зависит от ε. Таким образом, область достижимости $K(\bar{t})$ непрерывно зависит от момента времени $\bar{t}$. Теорема 1 доказана.

## 4. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Из формулы (2.7) при $k = m - 1$ и $t = t_m = T$ получим

$$X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}W_iE_i \times \\ \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_i[t_i, \tau]u^{(i)}(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_{m-1}}^{T} H_m[T, \tau]u^{(m)}(\tau)d\tau = \eta, \qquad (4.1)$$

где

$$\eta = x^{(m)}(T) - X_m[T, t_{m-1}] \times \\ \times F_{m-1}^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}W_i^{(m-1)}\alpha_i - (-1)^m X_m[T, t_{m-1}] \times \\ \times F_{m-1}^{-1} W_1^{(m-1)}E_1X_1[t_1, t_0]x^{(1)}(t_0). \qquad (4.2)$$

Отметим, что здесь число соотношений равно $n_m$, а η — известный вектор.

Теперь в выражение (4.1) вместо функций $H_i[t_i, \tau]$, $i = 2, ..., m$, введем функции $\bar{H}_i[t_i, \tau]$ следующим образом:

$$\bar{H}_1[t_1, \tau] = \begin{cases} H_1[t_1, \tau] \text{ при } t_0 \le \tau \le t_1, \\ 0 \text{ при } t_1 < \tau \le t_m = T, \end{cases}$$

$$\bar{H}_i[t_i, \tau] = \begin{cases} 0 \text{ при } t_0 \le \tau < t_{i-1}, \\ H_i[t_i, \tau] \text{ при } t_{i-1} \le \tau \le t_i, \\ 0 \text{ при } t_i < \tau \le t_m = T, \quad i = 2, ..., m-1, \end{cases}$$

$$\bar{H}_m[t_m, \tau] = \begin{cases} 0 \text{ при } t_0 \le \tau < t_{m-1}, \\ H_m[T, \tau] \text{ при } t_{m-1} \le \tau \le t_m = T. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Соотношение (4.1) при помощи введенных функций (4.3) запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_iE_i^{-1} \times \\ \times \int_{t_0}^{T}\bar{H}_i[t_i, \tau]u^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T}\bar{H}_m[T, \tau]u^{(m)}(\tau)d\tau = \eta$$

или

$$\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_iE_i^{-1} \times \right. \\ \left. \times \bar{H}_i[t_i, \tau]u^{(i)}(\tau)\right)d\tau + \int_{t_0}^{T}\bar{H}_m[T, \tau]u^{(m)}(\tau)d\tau = \eta. \qquad (4.4)$$

Введем обозначения:

$$H[\tau] = (H_1[\tau], ..., H_{m-1}[\tau], H_m[\tau]),$$

$$u(\tau) = (u^{(1)}(\tau), ..., u^{(m-1)}(\tau), u^{(m)}(\tau))^T, \qquad (4.5)$$

где

$$H_i[\tau] = (-1)^{m+1-i}X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_iE_i^{-1}\bar{H}_i[t_i, \tau], \\ i = 1, ..., m-1; \quad H_m[\tau] = \bar{H}_m[T, \tau].$$

Учитывая обозначения (4.5), соотношение (4.4) запишем в виде

$$\int_{t_0}^{T}H[\tau]u(\tau)d\tau = \eta. \qquad (4.6)$$

Для любой задачи управления принципиален вопрос о ее разрешимости, который сводится к анализу управляемости системы. Из формулы (4.6) следует, что составная система (1.1) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора η (4.2) из $R^{n_m}$ можно найти управление $u(\tau, \eta) = (u^{(1)}(\tau, \eta), ..., u^{(m)}(\tau, \eta))^T$, удовлетворяющее условию (4.6).

Таким образом, условие вполне управляемости составной системы (1.1) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Для того чтобы составная система* (1.1) *была вполне управляемой на отрезке* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы*

$$H[\tau] = ((-1)^m X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_1F_1^{-1}\bar{H}_1[t_1, \tau], ..., \\ X_m[T, t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_{m-1}E_{m-1}^{-1}\bar{H}_{m-1}[t_{m-1}, \tau], \bar{H}_m[T, \tau])$$

*были линейно независимыми на этом отрезке.* ♦

Теперь, на основе изложенного, функцию $u(t)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (4.6), ищем в виде [11]

$$u(t) = H^T[t]C + V(t), \qquad (4.7)$$

где $C$ — постоянный вектор, подлежащий определению, $V(t)$ — некоторая вектор-функция (может быть, измеримая ограниченная функция на промежутке времени $[t_0, T]$) такая, что

$$\int_{t_0}^{T} H[t]V(t)dt = 0. \tag{4.8}$$

Равенство (4.8) выражает условие ортогональности вектор-функций $V(t)$ ко всем строкам (блокам) матрицы $H[t]$.

Подставляя выражение (4.7) в условие (4.6) и учитывая условия (4.8), получим

$$Q(t_0, ..., T)C = \eta(t_0, ..., T), \tag{4.9}$$

где

$$Q(t_0, ..., T) = \int_{t_0}^{T} H[t]H^T[t]dt. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.9) является системой $\sum_{k=1}^{m+1} i_k$ алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_j$, $j = 1, ..., \sum_{k=1}^{m+1} i_k$.

Уравнение (4.9) имеет решение, если $\det Q \neq 0$ либо ранг матрицы $Q$ совпадает с рангом расширенной матрицы $\{Q, \eta\}$.

Решение уравнения (4.9)

$$C = Q^{-1}\eta, \tag{4.11}$$

следовательно, из выражений (4.7) и (4.11) имеем

$$u(t) = H^T[t]Q^{-1}\eta + V(t). \tag{4.12}$$

Таким образом, решение задачи 1 можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в работе [11].

**Теорема 3.** *Для того чтобы существовало программное управление* (4.7) (*или* (4.12)) и *соответствующее ему решение системы* (1.1), *удовлетворяющее условиям* (1.2)—(1.4), *необходимо и достаточно, чтобы матрица* (4.10) *была неособой или чтобы ранги матриц $Q$ и $\{Q, \eta\}$ были одинаковы.* ♦

Для решения задачи 2 заметим следующее. При заданном критерии качества $æ[u]$ задачу оптимального управления с интегральными условиями (4.6) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления, где надлежит определить минимум функционала $æ[u]$ при условиях (4.6). Однако, как видно из формул (4.3) и (4.5), подынтегральные функции в условии (4.6) являются разрывными, поэтому классические теоремы вариационного исчисления не применимы для исследования этой задачи.

Левая часть условия (4.6) является линейной операцией, порожденной функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$ [6].

Следовательно, если функционал $æ[u]$ является нормой некоторого линейного нормированного пространства, то решение задачи 2 следует искать путем решения проблемы моментов, тогда набор оптимальных управляющих воздействий $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, минимизирующий функционал $æ[u]$ и удовлетворяющий условию (4.6), будет решением задачи 2. Таким образом, задача 2 приводится к проблеме моментов, решение которой известно из работы [6].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. Учитывая линейность условия преемственности между составными системами, введена формула определения фазового состояния составной системы (1.1) для произвольного момента времени $t$ из любого промежутка времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., m$, при заданном начальном состоянии. Используя явный вид управляемого движения составной системы, исследованы некоторые характерные свойства движения. Построено решение задачи управления линейными составными системами и предложен способ решения задачи оптимального управления, сформулированы условия существования программного управления и движения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 754—756.
2. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, вып. 2. — С. 215—222.
3. *Куржанский А.Б.* Задачи динамики и управления для гибридных систем // Тез. докл. междунар. конгресса «Нелинейный динамический анализ — 2007», 4—8 июня 2007 г. — СПб., 2007. — С. 10.
4. *Borrelli F., Baotic M., Bemporad A., Morreri M.* Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hibrid systems // Automatica. — 2005. — Vol. 41. — P. 1709—1721.
5. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems. — Berlin: Springer, 2003. — 202 p.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
7. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Иностр. лит., 1954. — Т. 2.
8. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 576 с.
9. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
11. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.*

**Барсегян Ваня Рафаелович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, Ереванский государственный университет,
☎ (374-10) 52-36-40, ✉ barseghyan@sci.am, barsegh@ysu.am.