УДК 65.012.1

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2023.6.2

ФОРМИРОВАНИЕ ПОКОЛЕНИЙ НОВОЙ ТЕХНИКИ КАК ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

С.А. Баркалов, В.Н. Бурков, П.Н. Курочка, Е.А. Серебрякова

Аннотация. Процесс развития любого предприятия предполагает совершенствование механизмов управления фирмой, позволяющих руководителю принимать управленческие решения, основываясь на достижениях науки, а не следуя интуитивным представлениям, базирующимся на его личном опыте. А это, в свою очередь, предполагает совершенствование процесса модельного обеспечения, исключающего совпадение пиков потребления ресурсов при работе над несколькими проектами. Для этой цели может применяться концепция поколения развития новой техники, формируемого из отдельных прототипов, являющихся действующими образцами, на которых можно определить некоторые особенности функционирования разрабатываемого проекта. Естественно, что не весь модельный ряд целесообразно включать в поколение развития новой техники. Именно поэтому возникает задача отбора минимально необходимого числа изделий для этих целей. Такая задача относится к классу задач о покрытии множества, полном – в том случае, когда отобранные прототипы должны обладать всем набором свойств, которыми обладает разрабатываемый модельный ряд, или частичном – в том случае, если требуется, чтобы отобранные образцы обладали только некоторым количеством свойств. Для решения обеих задач представлены точные алгоритмы и приближенные эвристические алгоритмы.

Ключевые слова: задача размещения, задача о полном покрытии множества, задача о частичном покрытии множества, жизненный цикл инновации, поколение развития новой техники, прототип, матрица свойств.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс создания и совершенствования новой техники является одним из приоритетных направлений развития Российской Федерации. Именно поэтому создание поколений новой техники предопределяет достижение определенного прогресса в области конструктивных и технологических решений, на базе которых и осуществляется их разработка [1, 2]. Применение новых решений в конструктивной и технологической сфере предполагает получение образцов новой техники, обладающих новыми функциональными свойствами. Таким образом, создание новых функциональных свойств у разрабатываемого объекта предполагает применение новых конструктивно-технологических решений [3, 4].

Но создание образцов новой техники – очень трудоемкий процесс, связанный со значительными затратами материальных, кадровых и финансовых ресурсов. Любая продуктивная идея, положенная в основу такой разработки, будет находить свое применение в новых поколениях техники, образующих модельный ряд. Именно поэтому в технике широко используется понятие прототипа, т. е. работающего изделия, позволяющего осуществить моделирование процессов, возникающих в создаваемом новом изделии.

Но в ходе реализации любого проекта возникает проблема ресурсного обеспечения, потенциальная возможность решения которой основывается на том, что требуемые ресурсы могут быть распределены по времени в течение всего срока реализации проекта, т. е. они не требуются «все и сразу». А так как предприятие, как правило, занимается реализацией сразу нескольких проектов, то именно поэтому необходимо организовать процесс выполнения проекта таким образом, чтобы пики потребления ресурсов не совпадали с аналогичными периодами в других выполняемых проектах [5–7]. Это требует осуществлять отбор прототипов для формирования поколения новой техники, ограничиваясь неким минимально необходимым их количеством, что в какой-то мере позволяет сократить объем необходимых ресурсов.

В этом случае возникает идея решать задачу формирования поколения новой техники при помощи методов оптимизации и ставится вопрос о том, какие критерии принять в качестве оптимизационных [7, 8]. Другими словами, что же именно необходимо оптимизировать?

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Так как любая продуктивная идея, как правило, имеет продолжение, выражающееся в создании целой последовательности новых изделий, обладающих новыми функциональными свойствами, возникает вопрос о том, что можно использовать в качестве прототипа с целью разработки последующего поколения инновации. Естественно, что в основу отбора положен принцип идентичности сферы применения: трактор применяется для выполнения одного множества работ, а танк для – другого.

Наиболее ярко это может быть видно на примере развития авиационной техники. Например, советский пассажирский самолет на реактивной тяге ТУ-104, являющийся третьим в мире. В первые два года своей эксплуатации, с 1956 по 1958 г., Ту-104 являлся единственным эксплуатировавшимся реактивным пассажирским самолетом в мире из-за прекращения полетов британского De Havilland Comet летом 1956 г. и до введения в коммерческую эксплуатацию американского Boeing 707 в октябре 1958 г. Официально существовали следующие модификации самолета: Ту-104, Ту-104А и Ту-104Б. Он выпускался до 1960 г., эксплуатировался до 1981 г. В дополнение к ТУ-104 был разработан самолет ТУ-124, имевший модификации ТУ-124А, ТУ-124Б, ТУ-124В. Наиболее удачная модификация ТУ-124А была вскоре преобразована в новый тип самолета ТУ-134, который также имел 19 модификаций. Самолет ТУ-134 производился до 1989 г. и находится в эксплуатации до сих пор.

Аналогичная картина и с западными образцами техники. Например, достаточно вспомнить британский De Havilland Comet – первый в мире реактивный пассажирский авиалайнер. Существовали следующие его модификации: Comet 1, Comet 1A, Comet 1XB, Comet 2X и еще 12 других. Самолет выпускался до 1964 г. и находился в эксплуатации до 1997 г.

Пассажирский авиалайнер должен сочетать в себе скорость и пассажировместимость, т. е. необходимо как можно быстрее доставить максимально возможное количество пассажиров в нужную точку. Именно по этому ключевому фактору и идет отбор при формировании множества поколений новой техники данного вида.

Самым простым решением по формированию модельного ряда было бы включение в качестве прототипа всего множества уже созданных изделий. Но это несколько избыточное решение. Как правило, отдельные изделия по своим свойствам могут быть достаточно близки и, соответственно, выбирать их все в качестве прототипа нецелесообразно. Рациональнее было бы выбрать некое их число N. Таким образом, возникает первый критерий оптимизации: минимальное количество прототипов, отобранных для развития инновационного продукта.

Допустим, имеется N изделий, обладающих M свойствами. Для того чтобы описать, какими свойствами обладает каждое из изделий, введем матрицу свойств A, произвольный элемент которой $a_{ij} = 1$ в том случае, если i-е изделие обладает j-м свойством, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Таким образом, матрица свойств A будет состоять из нулей и единиц. Если при формировании матрицы свойств использовать упорядоченное по времени создания множество изделий N (а свойства привязаны к изделию), то изделия, разработанные в более позднем периоде, как правило, обладают новыми свойствами, но теряют некоторые старые. В качестве примера можно привести классическую ситуацию, особенно ярко проявившуюся в период ликвидации чернобыльской катастрофы: применение полупроводниковой элементной базы привело к возникновению совершенно новых свойств, но противорадиационная устойчивость аппаратуры была потеряна. Именно поэтому матрица A будет иметь лентообразную структуру: элементы $a_{ij} = 1$ будут группироваться преимущественно около главной диагонали, образуя своеобразную «ленту».

Следовательно, из экономических соображений [9] возникает задача отбора минимального количества прототипов, которые могут быть использованы для последующей разработки изделия с заданным набором свойств.

Представим эту задачу как задачу целочисленного линейного программирования с целевой функцией

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \to \min \tag{1}$$

и ограничениями

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j = \overline{1, M},$$
$$\sum_{j=1}^{M} y_j = m, \qquad (2)$$
$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, N};$$
$$y_j \in \{0, 1\}; \quad j = \overline{1, M},$$

где x_i – двоичная переменная, равная единице в том случае, если i-е изделие отобрано в качестве прототипа, и нулю в противном случае; m – количество свойств, которым должны удовлетворять все отобранные прототипы; y_i – двоичная переменная, равная единице в том случае, если i-е изделие должно обладать этим свойством, и нулю в противном случае.

Задача (1), (2) предполагает определение минимального количества прототипов, которые будут обладать заданным количеством свойств, что как раз может послужить основой для дальнейшего развития данной инновации.

По своему характеру рассматриваемая задача очень близка к задаче о размещении объектов инфраструктуры в некоторой области, где в качестве объектов инфраструктуры выступают уже существующие изделия, а в качестве областей – свойства, которыми должны обладать отобранные прототипы [9].

При этом возможны две постановки задачи:

1. Число свойств, которым должно удовлетворять отобранное множество прототипов, должно быть равно общему числу свойств, характерному для всей совокупности изделий, т. е. должно выполняться соотношение вида

$$m = M.$$

2. Число свойств, которыми обладают отобранные прототипы, меньше или равно их общему числу, т. е. выполняется неравенство вида

$$m \leq M.$$

Задачи первого типа относятся к классу задач теории графов о полном покрытии множества, возможные алгоритмы решения которой представлены в работе [10]; задачи второго типа – к классу задач о частичном покрытии. Обе задачи являются *NP*-трудными.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОЛНОМ ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

Задача полного покрытия множества формально описывается целевой функцией (1) и ограничениями (2), из которых исключается второе ограничение, т. е. задача приобретает следующий вид. Целевая функция (1) остается без изменения, а система ограничений будет записана так:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, M}, \qquad (3)$$
$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, N}.$$

Задача (1), (3) относится к классу задач целочисленного линейного программирования и решаться симплекс-методом уже не может.

Если проанализировать систему ограничений (3), то становится ясно, что система неравенств, приведенная в ней, представляет собой требование о том, что каждое из свойств должно соответствовать хотя бы одному из изделий.

Если некоторому свойству соответствует только одно изделие, то такое изделие будем называть уникальным.

Утверждение 1. *Уникальные изделия должны включаться в множество отобранных прототипов в обязательном порядке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Только уникальное изделие обладает конкретным свойством, никакое другое изделие этого свойства не имеет. Именно поэтому для того, чтобы обеспечить «покрытие» всех свойств формируемой выборкой, необходимо в эту выборку включить и данное изделие. ♦

Определить наличие уникальных изделий достаточно просто: для этого необходимо найти сумму по всем столбцам матрицы свойств. В том случае, если сумма по столбцу равна единице, то изделие, отвечающее этому свойству, является уникальным и его необходимо обязательно включить в решение.

Если же рассмотреть произведение всех неравенств, включенных в ограничения, т. е.

$$\prod_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \geq 1, \qquad (4)$$

и раскрыть все скобки, то получится булевый многочлен степени *M*. В этом случае можно сформулировать следующее

Утверждение 2. *Каждое слагаемое булевого многочлена M-й степени раскрытого выражения* (4) *представляет собой вариант решения поставленной задачи, удовлетворяющий ограничениям* (3), *но не являющийся в общем случае оптимальным решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение, которое необходимо получить, должно удовлетворять системе нестрогих неравенств (3), означающих, что каждому свойству должно соответствовать хотя бы одно изделие. Если изделие, имеющее это свойство, единственно, то ограничение будет выполняться в форме равенства и такое изделие будет уникальным. В итоге всю систему ограничений в виде нестрогих неравенств (3) можно заменить одним ограничением, представляющим произведение сомножителей, описывающих набор изделий, которые будут обладать рассматриваемым свойством. Таких изделий может быть несколько. В том случае, когда ни одно из изделий не будет обладать каким-то свойством, сомножитель, соответствующий такому свойству, будет содержать одни нули, и сам будет равен нулю, а поэтому все выражение будет равно нулю, что приводит к нарушению ограничений. Действительно, выражение (4) представляет собой произведение, в котором число сомножителей равно числу свойств, которыми обладают все изделия, т. е. M. В свою очередь, каждый сомножитель представляет собой своеобразный перечень изделий, которые обладают данным свойством. Если раскрыть многочлен (4), то каждое слагаемое будет иметь степень M и описывать один из вариантов отбора. ♦

Тривиальным решением будет выбрать в качестве прототипов весь набор изделий, т. е. все N, но можно и сократить возможное число претендентов на формирование нового поколения инноваций. Это возможно в случае, если какое-то изделие будет частично удовлетворять свойствам, которые присущи и некоторым другим изделиям, которые в этом случае отбирать не нужно. Это сократит число отбираемых образцов для включения в поколение новой техники. При этом размерность решаемой задачи можно сократить на стадии подготовки данных, используя понятие уникального изделия, которому присущи свойства, отсутствующие у других изделий. Как правило, к таким изделиям относятся изделия последней разработки. Естественно, такие изделия должны включаться в решение.

Таким образом, задача заключается в отборе минимально необходимого количества прототипов, которые бы обладали всеми свойствами, соответствующими данному модельному ряду изделий. Причем таких множеств может оказаться несколько. Все они выбираются и предъявляются лицу, принимающему решение, которое определяет приемлемый вариант.

Минимальное значение целевой функции будет обеспечено в том случае, когда все ограничения в форме нестрогих неравенств будут выполняться только в виде равенств. Это будет означать, что каждое свойство реализовано только для одного изделия. Но такое на практике, как правило, не встречается, так как обычно каждое свойство характерно для нескольких изделий. Это приводит к тому, что ограничения (3) будут выполняться уже в форме строгих неравенств [10–12]. Но используя двоичный характер переменных задачи x_i, можно заменить систему неравенств на рекуррентную систему булевых уравнений, что позволяет сформулировать следующее

Утверждение 3. *Решение задачи* (1), (3) *эквивалентно решению последовательности следующих булевых уравнений*:

$$\prod_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i = k,\ k = 1, 2, \ldots, l\ , \qquad (5)$$

Здесь теоретически верхней границей для l будет являться значение $l = N^M$, т. е. вариант, соответствующий случаю, когда все N изделий обладают всеми M свойствами. Но данный случай соответствует тривиальному решению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Знак неравенства в ограничении (3) применен потому, что в принципе возможен вариант, когда одним и тем же свойством обладает несколько изделий, и тогда выражение (3) будет выполняться как строгое неравенство. Учитывая целочисленный характер задачи можно заменить неравенство (4) на последовательность равенств (5). Раскрывая выражение (5), приходим к булеву полиному степени M. Учитывая, что каждое такое слагаемое будет описывать один из вариантов решения, с целью минимизации количества отбираемых изделий необходимо выбрать тот член полинома, который имеет наименьшее число сомножителей, но они стоят в максимальной степени. ♦

Последовательно решая уравнение (5) при различных значениях k, за конечное число итераций приходим к искомому решению.

Для решения поставленной задачи необходимо записать выражение (5) в виде полинома M-й степени. Для этой цели в выражении (4) выбирают переменную, которая чаще всего встречается и, следовательно, при раскрытии скобок в булевом полиноме будет находиться в максимально возможной степени [10, 13, 14]. В этом случае справедливо следующее

Утверждение 4. *Слагаемые булева полинома* (5), *имеющие минимальное число сомножителей, соответствуют оптимальному решению задачи* (1), (3). *В этом случае в таком слагаемом содержится наименьшее число переменных x_i, но каждая из них имеет максимально возможную степень.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое изделие может обладать несколькими свойствами, поэтому, отбирая изделия, которые обладают максимальным числом свойств, тем самым уменьшаем количество отбираемых изделий. ♦

На основе свойств булевых многочленов, зафиксированных в утверждениях 1–4, можно построить точный алгоритм решения задачи. Для этой цели необходимо получить развернутое выражение для полинома (4). Причем не обязательно требуется получить все множество слагаемых выражения (4) в явном виде, а необходимо получить только несколько первых слагаемых, имеющих минимальное число сомножителей в максимальной степени. Степень каждого из сомножителей булева многочлена (4) должна быть равна числу свойств, которым должны удовлетворять отобранные образцы изделий. Каждое такое слагаемое, согласно утверждению 4, и будет являться решением рассматриваемой задачи.

При этом следует отметить, что выделение из булева многочлена первых членов, содержащих минимальное число сомножителей в максимальной степени, для задачи большой размерности достаточно трудоемкая и весьма затруднительная операция, которая до настоящего времени еще не компьютеризирована. В связи с этим предлагается эвристический алгоритм решения задачи (1), (3), который будет удобен для компьютерной реализации. Алгоритм основан на использовании утверждений 1–4 и сводится к работе с матрицей свойств.

Предварительный шаг. Создать матрицу свойств размерностью $N \times M$ и заполнить ее нулями и единицами по следующему правилу: если i-е изделие обладает j-м свойством, то $a_{ij} = 1$, если нет – то $a_{ij} = 0$. При этом число строк в данной матрице будет равно числу изделий, а число столбцов – числу свойств, которыми обладают эти изделия, т. е. $N' = N$ и $M' = M$, где N' и M' – вспомогательные переменные

Шаг k. Проверить, имеются ли в матрице свойств еще не вычеркнутые строки. Если нет, т. е. $N' = 0$, то решение найдено и процесс вычислений заканчивается. Если $N' \neq 0$, то проверяется, существует ли $1 \le i \le N$ такое, что выполняется соотношение вида

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1, N}.$$

Такие изделия будут уникальными и подлежат обязательному включению в отбираемое множество. Вычеркиваем i-ю строку матрицы и принимаем $N' = N' - 1$, а также соответствующие ей столбцы, для которых выполняется соотношение вида $a_{ij} = 1 \ \forall\ j = \overline{1, M'}$.

В случае, если уникальных изделий нет, исходная матрица остается неизменной. По матрице (или измененной, или исходной) производится вычисление сумм по строкам и столбцам.

Находим строку с наибольшей суммой. Если таких строк несколько, то берем строку с наименьшим номером. Изделие с этим номером необходимо включить в выборку, а строки и столбцы, с ним связанные, вычеркнуть. Повторяем шаг k.

Таким образом, за конечное число итераций получаем решение поставленной задачи.

Число возможных итераций будет явно меньше числа изделий, т. е. будет выполняться соотношение $k^{\max} < N$. Объясняется этот факт тем, что каждое из изделий обладает несколькими свойствами, и операция вычеркивания столбцов, соответствующих этим свойствам, приводит к неявному уменьшению числа объектов. Связано это с тем, что на следующем шаге некоторое изделие, имеющее некоторое количество свойств, совпадающих со свойствами уже отобранного, не сможет попасть в выборку, так как сумма по строке, соответствующей этому изделию, либо не будет максимальной, либо вообще может быть равной нулю.

Пример 1. Рассмотрим применение алгоритма на конкретном примере. Пусть имеется 7 изделий, в совокупности, обладающих 20-ю свойствами, т. е. $N = 7$, $M = 20$. Матрица свойств A приведена в табл. 1.

Необходимо отобрать некоторое количество изделий, которое бы обладало всеми 20-ю свойствами.

Таблица 1

Матрица свойств *A* после выделения уникального изделия

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ
I	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
II	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
III	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
IV	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
V	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	6
VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	7
Σ	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	

Вначале продемонстрируем возможности точного алгоритма, основанного на свойствах булевых многочленов [9, 10].

С учетом сокращения размерности задачи целевая функция (1) и ее система ограничений (3) в развернутом виде могут быть записаны в следующем виде

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,\; x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,\; x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 1,\; x_2 + x_3 + x_4 \geq 1,$$

$$x_3 + x_4 \geq 1,\; x_4 + x_5 \geq 1,$$

$$x_4 + x_5 \geq 1,\; x_4 + x_5 \geq 1,$$

$$x_5 + x_6 \geq 1,\; x_5 + x_6 \geq 1,\;\; x_5 + x_6 \geq 1,$$

$$x_6 + x_7 \geq 1,\; x_6 + x_7 \geq 1,\;\; x_6 + x_7 \geq 1,$$

$$x_7 \geq 1,\; x_7 \geq 1,\; x_7 \geq 1,\; x_7 \geq 1.$$

В этом случае выражение (4) может быть записано в виде

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 \times \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \times \left(x_2 + x_3 + x_4\right)^2 \times$$
$$\times \left(x_3 + x_4\right) \times \left(x_4 + x_5\right)^3 \times \left(x_5 + x_6\right)^3 \times \left(x_6 + x_7\right)^3 \times x_7^4 \geq 1.$$

Степень многочлена равна 20, что совпадает с исходными данными. Для дальнейшего решения выбираем члены булева многочлена в максимально возможной степени. При этом следует учесть, что от каждого сомножителя булева многочлена необходимо взять только один член, который будет в максимальной степени. В данном случае это будут $x_7^7,\ x_2^6,\ x_5^6,\ x_3$; имеется и другой вариант выбора изделий: $x_7^7,\ x_2^6,\ x_5^6,\ x_4$, т. е.:

- первый вариант: необходимо отобрать в качестве прототипов II, III, V и VII изделия;
- второй вариант: в качестве прототипов можно использовать II, IV, V и VII изделия.

Уже из этого примера становятся понятными сложности с получением решения из булевого многочлена, так как процедура выделения членов в максимальной степени будет являться трудноформализованной и достаточно сложной для программирования. В связи с этим рассмотрим применение эвристического алгоритма, изложенного выше.

Предварительный шаг. Построим матрицу свойств *A*, приведенную в табл.1.

Шаг 1. Проверяем, имеются ли незачеркнутые строки в матрице свойств. Такие строки имеются. Поэтому выделяем уникальные изделия. Это изделие под номером VII, обладающее свойствами 17, 18, 19, 20, закрывает и свойства 14, 15, 16. Соответствующие столбцы и строки в табл. 1 были вычеркнуты в целях уменьшения размерности решаемой задачи. Находим суммы по строкам и столбцам. Результаты представлены в табл. 2

Находим строку с наибольшей суммой. В данном случае таких строк несколько: 2, 4, 5 и 6. Выбираем вторую строку и вычеркиваем из матрицы свойств эту строку и столбцы. Результат представлен в табл. 2.

Шаг 2. Проверяем, имеются ли незачеркнутые строки в матрице свойств. Такие строки имеются. Поэтому пытаемся выделить уникальные изделия. Таких изделий нет, так как отсутствуют суммы по столбцам, равные 1. Поэтому находим строки с наибольшей суммой. Это строка 5 с суммой, равной 6. Соответствующие столбцы и строки в табл. 3 были вычеркнуты в целях уменьшения размерности решаемой задачи. Находим суммы по строкам и столбцам. Результаты представлены в табл. 3.

Шаг 3. Проверяем, имеются ли незачеркнутые строки в матрице свойств. Такие строки имеются. Поэтому пытаемся выделить уникальные изделия. Таких изделий нет, так как отсутствуют суммы по столбцам, равные 1. Поэтому находим строки с наибольшей суммой. Таких строк две: третья и четвертая с суммой, равной 1. Включаем в выборку третье изделие. Результаты представлены в табл. 4.

Таблица 2

Матрица свойств *A* после первого шага

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	∑
I	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
II	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	–
III	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
IV	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	4
V	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6
VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
∑	–	–	–	–	–	–	2	2	2	2	2	2	2	

Таблица 3

Матрица свойств *А* после второго шага

	7	8	9	10	11	12	13	Σ
I	0	0	0	0	0	0	0	0
III	1	0	0	0	0	0	0	1
IV	1	1	1	1	0	0	0	1
V	0	1	1	1	1	1	1	0
VI	0	0	0	0	1	1	1	0
Σ	2	–	–	–	–	–	–	

Таблица 4

Матрица свойств *А* после третьего шага

	7	Σ
I	0	0
III	1	1
IV	1	1
VI	0	0
Σ	2	

Шаг 4. Проверяем, имеются ли незачеркнутые строки в матрице свойств. Таких строк уже нет, т. е. решение получено. В состав представителей нового поколения техники необходимо ввести изделия II, III, V и VII. Но, как следует из предыдущего шага, другим вариантом решения будет включение в набор представителей IV изделия, т. е. еще одно множество изделий должно включать II, IV, V и VII.

Видно, что решения полностью совпали. Оба решения вполне обеспечивают представление в модельном ряде всех 20-ти свойств, которыми обладало исходное множество изделий. ♦

Но это – решение задачи о полном покрытии множества. Решение же задачи о неполном покрытии множества представляет определенные трудности, которые связаны с тем, что совершенно неясно, какие свойства в итоге будут отобраны, так как в исходной постановке это не указано. То есть отобранные прототипы должны обладать не всей совокупностью свойств, которыми обладает весь ряд изделий, а только частью из них, причем эту часть еще предстоит определить в ходе решения. Это обстоятельство препятствует применению метода последовательного приближения: вначале рассматривается задача полного покрытия множества, затем мощность множества уменьшается на единицу и решается задача о покрытии множества при данной мощности и т. д., пока не будет достигнут требуемый размер покрытия. В данном случае возникает вопрос о том, какие свойства отбрасывать. Можно, конечно же, ввести предположение о том, что должны быть отброшены свойства, присущие самым ранним образцам изделий, предполагая, что в более современных образцах они в том или ином виде также реализованы или же замещаются новыми, более современными, но со схожими функциями. Но данная проблема упирается в оценку свойств изделия, ранжирования этих свойств по важности.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНОГО ПОКРЫТИЯ

Рассмотрим задачу частичного покрытия двудольного графа. Для этого определим двудольный граф $G(X, Y, W)$, где X – множество вершин первого слоя (изделия), Y – множество вершин второго слоя (свойства), W – множество дуг. Дуга $(i, j) \in W$ в том случае, если изделие i обладает свойством j. Обозначим $A \subseteq X$ подмножество X, $B(A) \subseteq Y$ подмножество Y, содержащее все вершины, смежные с A. Можно сказать, что A покрывает $B(A)$, или множество изделий A обладает в совокупности свойствами $B(A)$.

Задачу о частичном покрытии сформулируем так: определить множество A минимальной мощности такое, что $\left|B(A)\right| \geq m$.

Заметим, что если $m = M$, то получаем известную задачу о покрытии двудольного графа.

Эвристический (жадный) алгоритм (оценка сверху) будет таким.

Шаг 1. Определяем $i_1 \in X$ максимальной степени. Удаляем ее и множество $Y_1 \in Y$ всех вершин, смежных с i_1. Если $\left|Y_1\right| \geq m$, задача решена. Если нет, переходим к следующему шагу.

Шаг k. Определяем i_k максимальной степени. Удаляем ее и множество $Y_k \in Y$ всех вершин, смежных с i_k. Если $\left|\bigcup_{S=1}^{k} Y_s\right| \geq m$, задача решена. Если нет, переходим к следующему шагу.

Очевидно, что за конечное число шагов (не более m) задача будет решена. Полученное решение дает верхнюю оценку $H_{\text{В}}$.

Пример 2. Рассмотрим граф (рис. 1). Примем $m = 8$, т. е. речь идет о полном покрытии.

Шаг 1. Вершина $3 \in X$ имеет максимальную степень. Удаляем ее и вершины 3, 4, 5, 6, смежные с ней.

Шаг 2. Оставшийся граф приведен на рис. 2. Здесь решение очевидно. Берем все вершины 1, 2, 3, 4, 5. Имеем $A = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\|A\| = 5$. ♦

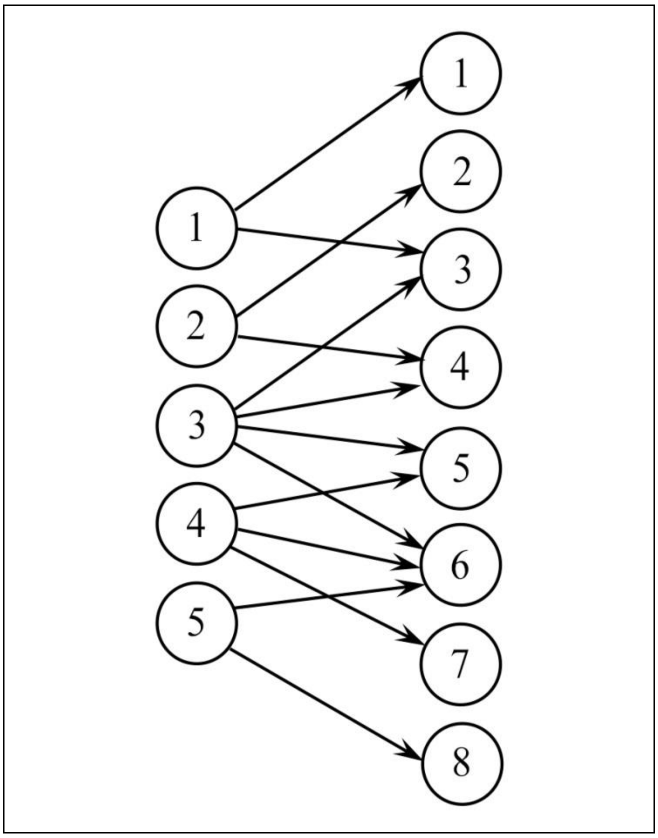

Рис. 1. Граф, рассматриваемый в примере 2

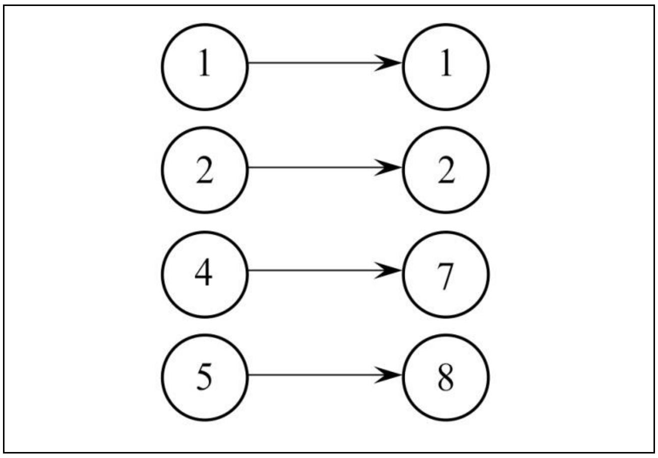

Рис. 2. Граф на втором шаге жадного алгоритма

4. МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ОЦЕНКА СНИЗУ)

Для получения нижней оценки применим метод сетевого программирования [15].

Сформулируем обобщенную двойственную задачу. На рис. 3 приведено сетевое представление первой задачи.

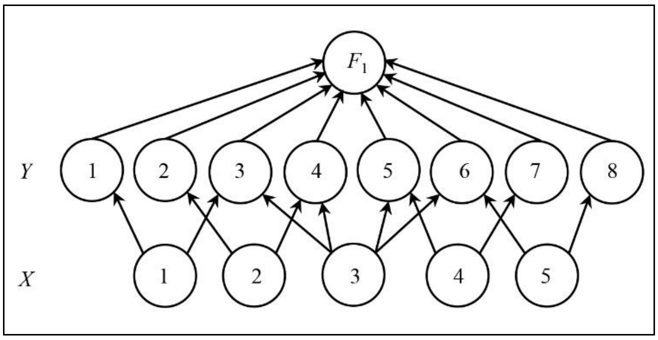

Рис. 3. Сетевое представление задачи

Согласно методу сетевого программирования полагаем вес каждой дуги (i, j), $i \in X$, $j \in Y$, равным l_{ij}, где l_{ij} – произвольные неотрицательные числа такие, что

$$\sum_{j \in P_i} l_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь P_i – множество дуг, исходящих из вершины $i \in X$.

Получаем M оценочных задач

$$L_i(x) = \min \sum_{i \in Q_i} x_i l_{ij}$$

при ограничениях $x_i = (0, 1)$

$$\sum_{i \in Q_j} x_i \geq 1,$$

где Q_j – множество дуг, заходящих из вершины $j \in Y$.

Решения этих задач имеют вид

$$y_j = \min_{i \in Q_j} l_{ij}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Упорядочим y_j по возрастанию, т. е.

$$y_{j1} \leq y_{j2} \leq \ldots y_{jm}.$$

Теорема 1. *Величина*

$$H(y) = \sum_{k=1}^{m} y_{jk} \tag{6}$$

дает нижнюю оценку для исходной задачи.

Данная теорема является частным случаем общей теоремы теории сетевого программирования [15].

Сформулируем обобщенную двойственную задачу (ОДЗ): определить (l_{ij}), максимизирующие оценку (6).

Пример 3. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1. Значения l_{ij} приведены в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные для обобщенной двойственной задачи

i	1		2		3				4		5	
(i, j)	(1, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 4)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 5)	(4, 7)	(5, 6)	(5, 8)
l_{ij}	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Имеем

$$y_1 = \frac{3}{4},\ y_2 = \frac{3}{4},\ y_3 = \frac{1}{4},\ y_4 = \frac{1}{4},\ y_5 = \frac{1}{4},$$
$$y_6 = \frac{1}{4},\ y_7 = \frac{3}{4},\ y_8 = \frac{3}{4},\ \ H_{\text{Н}} = 4.$$

Заметим, что если взять $m = 7$, то получим $H(y) = 3\frac{1}{4}$, но с учетом целочисленности $F_1(x)$ оценка будет также 4.

Полученную оценку можно использовать в методе ветвей и границ. ♦

Рассмотрим алгоритм решения задачи, основанный на методе перебора, который можно применить при небольших значениях N для решения поставленной задачи. Для этого определяем отрезок $[H_{\text{Н}}; H_{\text{В}} - 1]$ длины $q = H_{\text{В}} - H_{\text{Н}} - 1$. Делим этот отрезок на две части $r = \frac{1}{2}q$ (если q четное) или $r = \frac{1}{2}q$ и $r = \frac{1}{2}q + 1$ (если q нечетное). Проверяем все сочетания из N по r. Возможны два варианта.

• Найдется сочетание A такое, что $B(A) \geq m$. В этом случае делим отрезок $[r - 1; H_{\text{Н}}]$ на две части и повторяем процедуру.

• Не найдется такого сочетания, что $B(A) \geq m$. В этом случае делим на две части отрезок $[r; H_{\text{Н}} - 1]$ и повторяем процедуру. За конечное число шагов будет получено оптимальное решение. Для графа из примера 1 это будут $H_{\text{В}} = 5$, $H_{\text{Н}} = 4$. Поэтому достаточно проверить сочетания из 5 и 4, число которых равно 5. Находим оптимальное решение $A = (1, 2, 7, 8)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены возможные способы решения задачи об отборе образцов для формирования поколения новой техники. В основу приведенных алгоритмов положена задача о покрытии множества. Приведены алгоритмы решения задач о полном и частичном покрытии множества.

Недостатком данной постановки является тот факт, что все свойства, которыми обладают изделия, являются равнозначными, что, естественно, на практике не соответствует действительности. Было бы правильным учесть важность каждого из свойств, но здесь приходится сталкиваться тем, что важность свойств будет сильно зависеть от целевой аудитории, на которую ориентировано исследование: для разработчиков инновации важен один набор свойств, а для потребителя – другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асатурова Ю.М., Хватова Т.Ю.* Повышение инновационной активности предприятий в условиях дефицита финансов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2019. – Т. 12, № 1. – С. 132–145. [*Asaturova, Yu.M., Khvatova, T.Y.* Improving Innovative Activity of Enterprises in Conditions of Financial Deficit / St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Economics. – 2019. – Vol. 12, no. 1. – P. 132–145. (In Russian)]
2. *Курочка П.Н., Чередниченко Н.Д.* Задачи ресурсного планирования в строительном проекте // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). – Москва, 2014. – С. 4745–4753. [*Kurochka, P.N., Cherednichenko, N.D.* Zadachi resursnogo planirovaniya v stroitel'nom proekte. / Trudy XII vserossijskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU-2014). – Moscow, 2014. – S. 4745–4753. (In Russian)]
3. *Новиков Д.А., Иващенко А.А.* Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. – М.: КомКнига, 2006. – 332 с. [*Novikov, D.A., Ivashchenko, A.A.* Modeli i metody organizacionnogo upravleniya innovacionnym razvitiem firmy. – M.: KomKniga, 2006. – 332 s. (In Russian)]
4. *Белов М.В*. Оптимальное управление жизненными циклами сложных изделий, объектов, систем // Проблемы управления. – 2022. – № 1. – С. 19–32. [*Belov, M.V.* Optimal Control of the Life Cycle of Complex Systems / Control Sciences. – 2022. – No. 1. – P. 15–26.]
5. *Курочка П.Н., Сеферов Г.Г.* Модель управления объемами незавершенного производства при произвольной связи между работами проекта // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 178–182. [*Kurochka, P.N., Seferov, G.G.* Model' upravleniya ob"emami nezavershennogo proizvodstva pri proizvol'noj svyazi mezhdu rabotami proekta // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2011. – Vol. 7, no. 4. – S. 178–182. (In Russian)]

6. *Barkalov, S.A., Kurochka, P.N.* Model for determining the term of execution of subcontract works // Proceedings of 2017 tenth international conference "Management of large-scale system development (MLSD)". – Moscow, 2017. – DOI: 10.1109/MLSD.2017.8109598.
7. *Moncef, E.* Stochastic calculus in a risk model with stochastic return on investments / Stochastics. – 2021. – Vol. 93. – P. 110–129.
8. *Fox, W.P., Burks, R.* Mathematical programming: linear, integer, and nonlinear optimization in military decision-making / In: Applications of Operations Research and Management Science for Military Decision Making. – New York: Springer, 2019. – P. 137–191.
9. *Knight, F.* Risk, Uncertainty and Profit. – Boston and New York: Houghton Mifflin, 1921. – 381 p.
10. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций. – М.: Мир, 1977. – 432 с. [*Kofman, A., Anri-Laborder, A.* Metody i modeli issledovaniya operacij. – M.: Mir, 1977. – 432 s. (In Russian)]
11. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 435 с. [*Christofides, N.* Graph theory : an algorithmic approach. – London: Academic Press, 1975. – 400 p.]
12. *Селезнева И.Е., Клочков В.В., Егошин С.Ф.* Математическая модель межотраслевой координации стратегий развития (на примере здравоохранения и авиастроения) // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 99. – С. 57–80. [*Selezneva, I.E., Klochkov, V.V., Egoshin, S.F.* Mathematical Model of Intersectoral Coordination of Development Strategies (on the Example of Healthcare and Aircraft Industry) // Large-Scale System Control. – 2022. – Iss. 99. – P. 57–80. (In Russian)]
13. *Медведев С.Н.* Жадные и адаптивный алгоритмы решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием объектов // Автоматика и телемеханика. – 2023. – Вып. 3. – С. 139–168. [*Medvedev, S.N.* Greedy and Adaptive Algorithms for Multi-Depot Vehicle Routing with Object Alternation // Automation and Remote Control. – 2023. – Vol 84, iss. 3. – P. 341–364.]
14. *Дранко О.И.* Модель финансового прогнозирования и сценарии внутренних инвестиций // Проблемы управления. – 2007. – № 1. – С. 37–40. [*Dranko, O.I.* A Financial Prediction Model and Home Investment Scenarios // Control Sciences. – 2007. – No. 1. – P. 37–40. (In Russian)]
15. *Бурков В.Н., Буркова И.В.* Задачи дихотомической оптимизации. – М.: Радио и связь, 2003. – 156 с. [*Burkov, V.N., Burkova, I.V.* Zadachi dihotomicheskoj optimizacii. – M.: Radio i svyaz', 2003. – 156 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 22.05.2023,
после доработки 29.10.2023.
Принята к публикации 30.10.2023.

Баркалов Сергей Алексеевич – д-р техн. наук, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж
✉ bsa610@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6183-3004

Бурков Владимир Николаевич – д-р техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ vlab17@bk.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6633-3762

Курочка Павел Николаевич – д-р техн. наук, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж
✉ kpn55@ramler.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4945-9552

Серебрякова Елена Анатольевна – канд. экон. наук, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж
✉ sea-parish@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5129-246X

FORMING THE GENERATIONS OF NEW TECHNOLOGICAL PRODUCTS AS A SET COVERING PROBLEM

S.A. Barkalov[1], V.N. Burkov[2], P.N. Kurochka[3], and E.A. Serebryakova[4]

[1,3,4]Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
[2]Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[1]✉ bsa610@yandex.ru, [2]✉ vlab17@bk.ru, [3]✉ kpn55@ramler.ru, [4]✉ sea-parish@mail.ru

Abstract. The development of any enterprise implies improving its control mechanisms for the manager to make decisions based on the achievements of science rather than intuitive ideas of his (or her) personal experience. It is necessary to improve the model-building process in order to eliminate the coinciding peaks of resource consumption when working on multiple projects. For this purpose, the concept of a generation of new technological products can be adopted: a new product is formed from separate prototypes (operating models), which can serve to determine some features of the project under development. Naturally, it is unreasonable to include the entire model range in the generation of new technological products: one should select the minimum number of prototypes required. This problem belongs to the class of set covering problems: complete covering (when the selected prototypes must possess the entire set of properties possessed by the model series under development) or partial covering (when the selected prototypes must possess only some of these properties). Exact algorithms and approximate heuristic algorithms are presented to solve both problems.

Keywords: placement problem, complete set covering problem, partial set covering problem, innovation lifecycle, generation of new technological products, prototype, properties matrix.