УДК 629.7.036. 54-63

ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ КВАНТОВАНИЯ В ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Я. Андриенко, Е.И. Тропова, А.И. Чадаев

Для статистической оптимизации временной последовательности интервалов квантования импульсной системы терминального управления предложено заменять исходную систему статистически эквивалентной: выходные координаты эквивалентной системы при действии на нее определенного сочетания возмущений совпадают с моментами первых двух порядков координат исходной системы. Показано, что к эквивалентной системе в общем случае применима локальная формулировка дискретного аналога принципа максимума.

Ключевые слова: оптимизация интервалов квантования, статистически эквивалентная система, принцип максимума.

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в оптимизации временной последовательности интервалов квантования ΔT_i, $i = 0, 1, ..., I$, импульсной терминальной системы управления возникла впервые при коррекции траекторий полета космических аппаратов: действие случайных ошибок определения параметров орбиты в условиях падающей с течением времени эффективности коррекции приводит к тому, что если коррекция производится слишком поздно, то может потребоваться большой корректирующий импульс и значительное количество топлива на борту аппарата; излишне ранняя коррекция, более экономичная по энергетике, может привести к недостаточной терминальной точности управления и к необходимости повторной коррекции. При оптимизации последовательности интервалов квантования обеспечивалась минимизация расходуемого топлива с соблюдением условия, что терминальный риск R, статистически характеризующий конечную эффективность исполнения коррекций, не превышает заданного значения $R_{\text{зад}}$. Развитые применительно к такой постановке задачи методы [1, 2 и др.] предусматривали получение оптимальных моментов времени корректирования полета либо в функции времени полета [1], либо в функции результатов траекторных измерений [2].

В развитие подхода [1] будем определять временную программу изменения интервалов квантования ΔT_i, доставляющую минимальное значение риска R при исходно заданном алгоритме терминального управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается импульсная система автоматического управления, описываемая совокупностью нелинейных конечно-разностных уравнений

$$\Delta x_i^{(k)} = f_{ki}(\mathbf{x}_i, i, \mathbf{V}, \Delta T_i), \quad k = 1, 2, ..., K; \quad i = 0, 1, ..., I. \tag{1}$$

Здесь $\Delta x_i^{(k)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}$ — приращение координаты системы в дискретный момент времени i; $\mathbf{V} = (V_1, V_2, ..., V_N)$ — случайный вектор, характеризующий постоянные в процессе управления возмущения и ошибки измерения в системе управления; ΔT_i — интервал квантования системы; символ i, стоящий в выражении (1) перед вектором возмущений $\mathbf{V}$, означает, что некоторые из возмущений могут действовать, начиная только с i-го момента времени.

В дальнейшем считается, что случайные величины $V_1, V_2, ..., V_N$ приведены к канонической системе несвязанных случайных величин, число N которых конечно; предполагается, что центральные моменты нечетных порядков равны нулю.

Функции f_{ki} могут быть неаналитическими; рассматриваются системы с нелинейностями, имеющими симметричные (относительно начала координат) характеристики.

Интервалы ΔT_i по общей совокупности должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=0}^{I} \Delta T_i - T = 0, \tag{2}$$

где T — полное время работы объекта (ступени ракеты).

В качестве критерия оптимальности для выбора последовательности ΔT_i, $i = 0, 1, ..., I$, задается некоторая функция W от математических ожиданий $m_{I+1}^{(k)}$ и среднеквадратических значений $\sigma_{I+1}^{(k)}$ координат $x_{I+1}^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., K$, системы в дискретный (терминальный) момент времени $I + 1$:

$$R = W(\mathbf{m}_{I+1}, \boldsymbol{\sigma}_{I+1}). \tag{3}$$

2. МЕТОДИКА ЗАМЕНЫ ИСХОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМОЙ

Статистическую оптимизацию интервалов ΔT_i удобно проводить, учитывая некоторые идеи, положенные в основу методов статистической линеаризации. Эти методы, как известно, предусматривают замену нелинейных функций такими линейными, которые в определенном смысле статистически равноценны исходным нелинейным функциям. В рассматриваемом случае, когда критерием оптимальности служит функция от моментов первых двух порядков координат, в качестве условия статистической равноценности следует принять условие [3] равенства моментов первого и второго порядков нелинейной и линейной функций при данном вероятном законе распределения аргумента.

Исходную динамическую систему (1) с K выходными координатами $x_i^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., K$, условно будем рассматривать как безынерционную систему с $K(I + 1)$ выходными координатами $x_i^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., K$; $i = 1, 2, ..., I + 1$. Статистические коэффициенты передачи r_{kin} такой системы определяются выражениями (П.4) — см. Приложение — с заменой индекса k на ki.

Составим $N + 1$ независимых систем конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{i1}^{(k)} &= (r_{k(i+1)1} - r_{ki1})\sigma_{V_1}, \\
\Delta x_{i2}^{(k)} &= (r_{k(i+1)2} - r_{ki2})\sigma_{V_2}, \\
&\dots \\
\Delta x_{iN}^{(k)} &= (r_{k(i+1)N} - r_{kiN})\sigma_{V_N}, \\
\Delta x_{i(N+1)}^{(k)} &= m_{(i+1)}^{(k)} - m_i^{(k)}, \\
k = 1, 2, ..., K;& \quad i = 0, 1, ..., I,
\end{aligned} \tag{4}$$

где σ_{V_n}, $n = 1, 2, ..., N$, — среднеквадратическое значение возмущения V_n.

Каждой n-й системе уравнений ($n = 1, 2, ..., N + 1$) можно поставить в соответствие некоторую n-ю динамическую систему с переменными в дискретном времени i параметрами, на которую действует одно детерминированное возмущение $\xi_n = \sigma_{V_n}$ при $n = 1, 2, ..., N$ или $\xi_{\text{сист}}$ при $n = N + 1$, и которая описывается n-й системой уравнений из набора (4) систем. Процессы управления в одной из таких систем не зависят от возмущений, действующих на другую систему, но «управляющие» параметры ΔT_i одинаковы для всех систем.

Величины $\Delta x_{in}^{(k)}$ в общем случае оказываются нелинейными функциями текущих координат соответствующей системы и управляющих параметров в моменты времени i:

$$\begin{gathered}
\Delta x_{in}^{(k)} = F_{in}^{(k)}(x_{in}^{(1)}, x_{in}^{(2)}, ..., x_{in}^{(K)}; \Delta T_i, \xi_n), \\
k = 1, 2, ..., K; \quad i = 0, 1, ..., I; \\
n = 1, 2, ..., N + 1.
\end{gathered} \tag{5}$$

Составим такую комбинацию динамических систем (5), чтобы получить величины

$$\begin{gathered}
X_i^{(k)} = \left(\sum_{n=1}^{N} (x_{in}^{(k)})^2\right)^{1/2}, \\
k = 1, 2, ..., K; \quad i = 1, ..., I + 1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Полученную систему назовем статистически эквивалентной исходной, поскольку из выражений (П.3), (П.11) — см. Приложение — и (4) следует, что координаты $X_i^{(k)}$ этой системы равны среднеквадратическому значению $\sigma_i^{(k)}$ координат $x_i^{(k)}$ исходной нелинейной системы (1) при равных значениях управляющего параметра — интервала квантования ΔT_i; и кроме того, величина $x_{i(N+1)}^{(k)}$ равна математическому ожиданию $m_i^{(k)}$ координат

$x_i^{(k)}$ исходной системы. Поэтому допустимые значения ΔT_i, обеспечивающие минимум функции от координат $x_{i(N+1)}^{(k)}$, $X_i^{(k)}$ статистически эквивалентной системы при действии на нее определенного (детерминированного) сочетания возмущений $\xi_{\text{сист}}$, $\xi_n = \sigma_{V_n}$, $n = 1, 2, ..., N$, обеспечивают одновременно минимум такой же функции от математического ожидания $m_i^{(k)}$ и среднеквадратического отклонения $\sigma_i^{(k)}$ координат исходной системы при действии на не е случайных возмущений $V_1, V_2, ..., V_N$.

Для проведения оптимизации необходимо определить функции $F_{in}^{(k)}$, с помощью которых по величинам (6) определяются и величины $X_i^{(k)}$. Особенность этих функций заключается в их непрерывности в области допустимых изменений $x_{in}^{(k)}$, ΔT_i даже в тех случаях, когда соответствующие функции f_{ki} существенно нелинейные. Объясняется это тем, что величины $\Delta x_{in}^{(k)}$ определяются по выражениям (П.4) и (4) через математические ожидания координат $x_i^{(k)}$. Случайные компоненты при этом усредняют характеристики в диапазоне возможных значений аргумента и, таким образом, нелинейности исходной системы при переходе к эквивалентной существенно сглаживаются. Функция $F_{in}^{(k)}$ может быть поэтому разложена в ряд Маклорена по аргументам $x_{in}^{(k)}$, ΔT_i и ξ_n.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим динамическую систему, описываемую совокупностью уравнений (5) и (6), для которой в качестве критерия оптимальности принята функция

$$R = W(x_{(I+1)(N+1)}^{(1)}, ..., x_{(I+1)(N+1)}^{(K)};\; X_{I+1}^{(1)}, ..., X_{I+1}^{(K)}), \tag{7}$$

соответствующая критерию (3).

Наиболее простой математический аппарат для оптимизации эквивалентной системы (5), (6) по критерию (7) предоставляет принцип максимума. Отметим, что дискретные аналоги этого принципа неприменимы к системам типа исходной системы (1). При оптимизации же эквивалентной системы (5), (6) правомерно использовать локальные формулировки принципа максимума [4].

Чтобы выполнить условие (2), воспользуемся результатом работы [5]. Полагая, что функции $F_{in}^{(k)}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам, получим, что импульс-функции $p_{in}^{(k)}$ и $p_i^{(k)}$, приращения которых

$$\Delta p_{(i-1)n}^{(k)} = -\sum_{k_1=1}^{K}\left(\sum_{n_1=1}^{N+1} p_{in}^{(k_1)}\frac{\partial F_{in}^{(k_1)}}{\partial x_{in}^{(k)}} + p_i^{(k_1)}\frac{\partial \Delta X_i^{(k_1)}}{\partial x_{in}^{(k)}}\right),$$

$$\Delta p_{i-1}^{(k)} = -\sum_{k_1=1}^{K} p_i^{(k_1)}\frac{\partial \Delta X_i^{(k_1)}}{\partial X_i^{(k)}},$$

и дискретный аналог гамильтониана

$$H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i) = \sum_{k_1=1}^{K}\sum_{n=1}^{N+1} p_{in}^{(k)} F_{in}^{(k)} + \sum_{k_1=1}^{K} p_i^{(k)} \Delta X_i^{(k)},$$

также непрерывные вместе со своими частными производными по тем же аргументам. Здесь для сокращения записи введен вектор $\mathbf{Y}_i$ с составляющими

$$x_{in}^{(k)} = Y_i^{(d_{1n}+k)}, \quad p_{in}^{(k)} = Y_i^{(d_{2n}+k)},$$
$$X_i^{(k)} = Y_i^{(d_3+k)}, \quad p_i^{(k)} = Y_i^{(d_4+k)},$$

где $d_{1n} = K(n - 1)$, $d_{2n} = K(N + n)$, $d_3 = 2(N + 1)$, $d_4 = 2K(N + 1)$.

Краевые условия для импульс-функций определяются по виду функции R.

Приращение ΔR функции R при изменении интервала ΔT_i на величину Δ_i может быть представлено через гамильтониан следующим образом [5]:

$$\Delta R = -\sum_{i=0}^{I}[H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i + \Delta_i) - H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i)] + \eta, \tag{8}$$

где $\eta = \eta_1 + \eta_2$ — остаточный член, причем

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{I}\sum_{d}\left\{\frac{\partial}{\partial Y_i^{(d)}}[-H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i + \Delta_i) + H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i)]\right\}\Delta Y_i^{(d)},$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{I}\sum_{d_1, d_2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial Y_i^{(d_1)}\partial Y_i^{(d_2)}}[-H(i, \mathbf{Y}_i + \vartheta\mathbf{\Delta Y}_i, \Delta T_i + \Delta_i) + H(i, \mathbf{Y}_i + \theta\mathbf{\Delta Y}_i, \Delta T_i + \Delta_i)]\right\} \times \Delta Y_i^{(d_1)}\Delta Y_i^{(d_2)}. \tag{9}$$

Здесь $0 < \vartheta < 1$, $0 < \theta < 1$.

Если существует оптимальное значение интервала ΔT_i, то при малых отклонениях от его оптимального значения должно иметь место неравенство

$$\Delta R \geqslant 0. \qquad (10)$$

Но при малых величинах Δ_i малы и значения $|\mathbf{\Delta Y}_i|$, а также приращения производных гамильтониана, стоящие в фигурных скобках выражения (9). Следовательно, в этом случае остаточный член η оказывается пренебрежимо малым по сравнению с приращением гамильтониана в формуле (8).

Тогда, учитывая условие (2), получим из выражений (8) и (10), что необходимым — для обеспечения оптимальности последовательности интервалов квантования — является условие $\Delta\Lambda \leqslant 0$ при малых отклонениях интервала ΔT_i от его оптимального значения; здесь

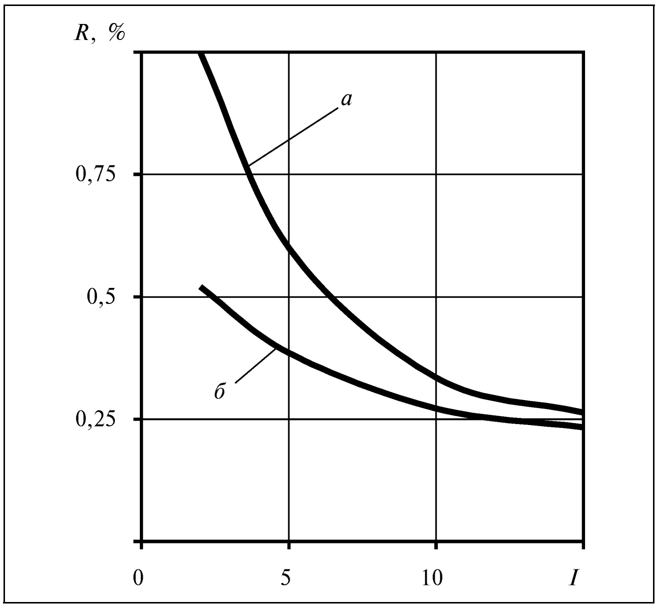
$$\Lambda = \sum_{i=0}^{I} H(i, \mathbf{Y}_i, \Delta T_i) + \lambda\left(\sum_{i=0}^{I} \Delta T_i - T_{I+1}\right),$$

где множитель Лагранжа λ определяется так, чтобы выполнялось условие (2).

Пример: оптимизация размещения — по высоте баков — точечных чувствительных элементов (ч. э.) уровнемеров, входящих в состав системы [6] терминального управления расходованием топлива (СУРТ) жидкостной ракеты-носителя (РН).

Погрешность управления СУРТ оценивается статистически предельным значением $R = |m| + 3\sigma$ (m — математическое ожидание, σ — среднеквадратическое отклонение от m) конечного — в конце процесса опорожнения баков — значения рассогласования объемов компонентов топлива в момент выключения двигателя ступени.

В качестве исходного варианта размещения ч. э. в цилиндрических баках ступени РН примем равномерное по высоте бака распределение ч. э., а следовательно, и равномерную последовательность временных интервалов квантования СУРТ. И тогда зависимость терминальной точности R (в процентах относительного конечного рассогласования объемов окислителя и горючего) от общего числа I ч. э., размещенных в баке, характеризуется кривой *а*, представленной на рисунке. При оптимизации по критерию R размещения ч. э. по высоте баков — в соответствии с изложенными в статье положениями — кривая *а* трансформируется в график *б*. Оказывается (см. рисунок), что оптимизация ΔT_i, $i = 1, 2, ..., I$, дает ощутимый эффект (по сравнению с равномерным распределением ч. э.) лишь при относительно небольшом числе I ч. э. (при $I < 15$); дальнейшее увеличение I имеет смысл лишь в части поддержания терминальной точности управления СУРТ в условиях возможных проявлений отказов в работе ч. э.



Зависимость погрешности терминального управления от числа интервалов квантования: при равномерном (*а*) и оптимальном (*б*) по высоте цилиндрических баков размещении чувствительных элементов

В завершение примера представим два варианта возможного размещения восьми ч. э. на предпоследней ступени РН с номинальным временем активного участка полета $T = 179{,}8$ с при:

равномерной последовательности временных интервалов квантования $\Delta T_i = 20$ с, $i = 1, 2, ..., 8$;

оптимизированной (по изложенному в статье методу) последовательности интервалов (см. таблицу), обеспечивающей 30%-е повышение терминальной точности управления расходованием топлива РН — по сравнению с вариантом 1.

Оптимизированная последовательность временных интервалов

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ΔT_i, с	19,8	24,7	38,6	27,6	19,7	14,1	10,1	7,2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дальнейшее развитие принципов оптимизации временной последовательности интервалов ΔT_i квантования применительно к перспективным объектам ракетно-космической техники связывается с необходимостью учета возможных отказов в измерительных и исполнительных цепях бортовых систем управления. И как следует из начального опыта разработки таких объектов, эффективность оптимизации последовательности ΔT_i, $i = 1, 2, ..., I$ заметно возрастает — при сопутствующем увеличении (до 20÷30) рационального числа I интервалов квантования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Статистическая линеаризация многовходовых нелинейных систем. Рассмотрим многомерную нелинейную безынерционную систему, находящуюся под воздействием N возмущений V_1, V_2, ..., V_N с нулевыми математическими ожиданиями и имеющую K выходных координат $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(K)}$, которые однозначно связаны с возмущениями нелинейными соотношениями

$$x(k) = \varphi_k(V_1,\ V_2,\ ...,\ V_N),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ K.$$

Изложим метод статистической линеаризации, пригодный для анализа нелинейных систем с возмущениями, подчиняющимися симметричным законам распределения с конечными вероятностными моментами.

В методе используются некоторые особенности способа [7] формирования возмущений при статистическом моделировании действия системы — для получения оценок вероятностных точностных характеристик системы. Суть этого способа сводится к представлению реализованного в s-м процессе, $s = 1, 2, ..., S$, значения ξ_{sn} возмущения V_n в виде конечной суммы некоторых составляющих $\xi_{sn}^{(g)}$, $g = 1, 2, ..., G$, формируемых по правилу

$$\xi_{sn}^{(g)} = \beta_g \alpha_{st} \sigma_{V_n},\quad g = 1,\ 2,\ ...,\ G, \tag{П.1}$$

где β_g — коэффициент, зависящий от закона распределения вероятностей возмущения V_n; α_{st} — элемент ортогональной по столбцам матрицы $\|\alpha_{st}\|$, равный +1 или −1; t — номер столбца матрицы $\|\alpha_{st}\|$, однозначно определяемый по номерам n и g. Значения математического ожидания $m^{(k)}$ и дисперсии $(\sigma^{(k)})^2$ координаты $x^{(k)}$ при выборе соответствующего числа S реализаций процессов управления могут быть вычислены с достаточной для практического применения точностью по формулам

$$m^{(k)} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} x_s^{(k)},\quad (\sigma^{(k)})^2 = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}(x_s^{(k)}) - (m^{(k)})^2,$$
$$k = 1,\ 2,\ ...,\ K, \tag{П.2}$$

где $x_s^{(k)} = \varphi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, ..., \xi_{sN})$.

Обозначим через ξ_c всю группу систематических возмущений, действующих на систему. Математическое ожидание $m_{ng}^{(k)}$ координаты $x^{(k)}$ для случая, когда g-я составляющая возмущения ξ_{sn} рассматривается как систематическая, а все остальные составляющие возмущений — как случайные (величина ξ_c при этом условно считается подчиняющейся биномиальному закону), могут быть вычислены следующим образом:

$$m_{ng}^{(k)} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}\operatorname{sign}\xi_{sn}^{(g)}. \tag{П.3}$$

Введем обозначение

$$r_{kn} = \left(\sum_{g=1}^{G}(m_{ng}^{(k)})^2 \Big/ \sum_{g=1}^{G}(\xi_{sn}^{(g)})^2\right)^{1/2},$$
$$n = 1,\ 2,\ ...,\ N;\quad k = 1,\ 2,\ ...,\ K, \tag{П.4}$$

и предположим сначала, что число $S = GN + 1$, а значит, матрица $\|\alpha_{st}\|$ является квадратной; первый столбец матрицы, состоящий из элементов, равных +1, не используется; следующие GN столбцов используются при формировании GN составляющих $\xi_{sn}^{(g)}$, $n = 1, 2, ..., N$; $g = 1, 2, ..., G$. С учетом выражений (П.1)—(П.4) составим равенство

$$\sum_{n=1}^{N} r_{kn}^2\,\sigma_{V_n}^2$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{g=1}^{G}\left(\sum_{s=1}^{S} x_{ks}\operatorname{sign}(\xi_{sn}^{(g)})^2\right)^2 \Big/ S^2\sum_{g=1}^{G}\beta_g^2\right]. \tag{П.5}$$

Имея в виду (см. статью [7]), что $\sum_{g=1}^{G}\beta_g^2 = 1$, представим это равенство в виде

$$\sum_{n=1}^{N} r_{kn}^2\,\sigma_{V_n}^2 = \frac{1}{S^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2 +$$
$$+ \frac{1}{S^2}\sum_{s_1, s_2} 2x_{ks_1}x_{ks_2}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\operatorname{sign}\xi_{s_1 n}^{(g)}\xi_{s_2 n}^{(g)}\right),$$
$$s_1 \neq s_2. \tag{П.6}$$

Величина $\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2$ не зависит от параметров n и g, поэтому

$$\frac{1}{S^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2 = \frac{GN}{S^2}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2.$$

Заметим, что первая из формул (П.2) может быть представлена в виде

$$m^{(k)} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}\alpha_{s1},\quad k = 1,\ 2,\ ...,\ K,$$

и прибавим к правой части равенства (П.5) тождественно равную нулю величину

$$\frac{1}{S^2}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2 - \frac{1}{S^2}\sum_{s_1, s_2} 2x_{ks_1}x_{ks_2}\alpha_{s_1 1}\alpha_{s_2 1} - (m^{(k)})^2,$$
$$s_1 \neq s_2. \tag{П.7}$$

Учитывая сделанное (после записи (П.4)) замечание о порядке использования столбцов матрицы $\|\alpha_{st}\|$, запишем

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\operatorname{sign}\xi_{s_1 n}^{(g)}\xi_{s_2 n}^{(g)} = \sum_{t=2}^{GN+1}\alpha_{s_1 t}\alpha_{s_2 t}. \tag{П.8}$$

Тогда из выражений (П.6)—(П.8) получим

$$\sum_{n=1}^{N} r_{kn}^2 \sigma_{V_n}^2 = \frac{GN+1}{S^2}\sum_{s=1}^{S} x_{ks}^2 + \frac{1}{S^2}\sum_{s_1, s_2} 2x_{ks_1} x_{ks_2} \sum_{t>1}^{GN+1} \alpha_{s_1 t}\alpha_{s_2 t} - (m^{(k)})^2,$$
$$s_1 = s_2; \quad s_1, s_2 = 1, 2, ..., GN+1;$$
$$k = 1, 2, ..., K. \qquad (П.9)$$

Из свойства ортогональности квадратной матрицы по столбцам

$$\sum_{s=1}^{GN+1} \alpha_{st_1}\alpha_{st_2} = 0, \quad t_1 \ne t_2; \quad t_1, t_2 = 1, 2, ..., GN+1$$

следует и ортогональность матрицы по строкам:

$$\sum_{t=1}^{GN+1} \alpha_{s_1 t}\alpha_{s_2 t} = 0, \quad s_1 \ne s_2;$$
$$s_1, s_2 = 1, 2, ..., GN+1. \qquad (П.10)$$

Из уравнений (П.7), (П.9) и (П.10) следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} r_{kn}^2 \sigma_{V_n}^2 = (\sigma^{(k)})^2, \quad k = 1, 2, ..., K. \qquad (П.11)$$

Если $S > GN + 1$, то имеющийся набор возмущений $V_1, V_2, ..., V_N$ дополняется фиктивным случайным возмущением V_{N+1}, частные значения $\xi_{s(N+1)}$ которого получаются суммированием $S - (GN + 1)$ составляющих $\xi_{s(N+1)}^{(g)}$ ($g = GN + 2, GN + 3, ..., S$). Для набора возмущений $V_1, V_2, ..., V_{N+1}$ справедливы полученные выше формулы.

Отмечая, что $m_{(N+1)g}^{(k)} = 0$, $g = GN + 2, GN + 3, ..., S$, и, следовательно, $r_{k(N+1)} = 0$ ($k = 1, 2, ..., K$), получаем, что свойство (П.11) справедливо и при $S > GN + 1$.

Это свойство оказывается удобным для проведения статистической линеаризации многовходовых безынерционных нелинейных систем при ограниченном числе S реализаций выходных координат $x^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., K$. Все статистические коэффициенты передачи r_{kn} вычисляются весьма просто по формуле (П.4) в результате моделирования всего лишь S процессов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Ярошевский В.А.* Маневрирование космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1970. — 416 с.
2. *Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н.* Оптимальная стратегия при корректировании // Доклады АН СССР. — 1967. — № 1. — С. 47—50.
3. *Казаков И.Е., Доступов Б.Г.* Статистическая динамика нелинейных динамических систем. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.
4. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. — М.: Наука, 1973. — 255 с.
5. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I—III // Автоматика и телемеханика. — 1959. — № 10—12. — С. 1320—1334, 1444—1458, 1562—1547.
6. *Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Совершенствование энергетических характеристик жидкостных ракет средствами автоматического управления. Ч. II // Проблемы управления. — 2009. — № 2. — С. 59—65.
7. *Андриенко А.Я., Тропова Е.И., Чадаев А.И.* Методы анализа результатов летных испытаний бортовых систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 5. — С. 155—165.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Андриенко Анатолий Яковлевич, д-р техн. наук, зав. лабораторией, ✉ vladguc@ipu.rssi.ru,

Елена Ивановна Тропова — науч. сотрудник, ✉ vladguc@ipu.rssi.ru,

Александр Иванович Чадаев — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ vladguc@ipu.rssi.ru,

Институт проблем управления им. акад. В.А. Трапезникова РАН, ☎ (495) 334-88-71.