УДК 51-7

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.1.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ В АБСТРАКТНЫХ СИСТЕМАХ[1]

Ф.Т. Алескеров, Д.Н. Тверской

Предложена модель специализации в абстрактных системах с учетом общего ресурсного ограничения при условии, что структурные ограничения в модели являются линейными функциями. Изучены свойства решения задачи максимизации эффективности функционирования системы. Изучен вопрос возникновения специализации в системе с идентичными элементами.

Ключевые слова: абстрактные системы, специализация, общее ресурсное ограничение, структурные ограничения, эффективность.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классических работ [1, 2], оптимизационные методы широко применяются при моделировании биологических процессов. В частности, в рамках эволюционной биологии исследуется вопрос перехода от одноклеточных организмов к многоклеточным формам жизни. Изучается, каким образом колониальные организмы трансформируются в процессе эволюции в многоклеточные формы жизни, какие факторы влияют на данный процесс. Колониальный организм устроен следующим образом: некоторые клетки могут специализироваться на какой-то конкретной функции, но при этом не теряют потенциальной возможности выполнять прочие функции и выполняют их, например, в случае изменений внешних условий, вынуждающих к этому. Если условия, которые способствуют возникновению полной специализации в колониальном организме, сохраняются в течение достаточно длительного периода времени, то возможен переход от колониальной формы к многоклеточному организму.

Однако основополагающим оптимизационным моделям специализации, предлагаемым в эволюционной биологии [3—5], присущ ряд фундаментальных недостатков. Например, они не учитывают влияние окружающей среды на систему, хотя ряд экспериментальных работ показывает, что факторы окружающей среды должны оказывать влияние на жизнедеятельность колонии [6, 7]. В данной работе мы усовершенствуем модели, предлагаемые в эволюционной биологии, устраняя указанные недостатки, и рассматриваем эти новые модели уже в контексте теории абстрактных систем. Отметим, что рассматриваемые в данной работе задачи относятся к классу задач, исследуемых в рамках системной оптимизации [8].

1. МОДЕЛЬ

Рассмотрим абстрактную систему, состоящую из N элементов. Пусть $i = 1, ..., N$ — индексы элементов в системе. Предположим, что каждый элемент может выполнять одну из двух задач.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00804а, и в рамках программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов РФ «5-100», а также при финансовой поддержке Лаборатории теории выбора и анализа решений (ИПУ РАН) и Международной лаборатории анализа и выбора решений (НИУ ВШЭ).

Обозначим через $b_i \in [0,\ b_i^{\max}]$ уровень выполнения первой задачи элементом с индексом i, через $v_i \in [0,\ v_i^{\max}]$ — уровень выполнения второй задачи элементом с индексом i. Для каждого элемента с индексом i величины $b_i^{\max}$ и $v_i^{\max}$ есть неотрицательные вещественные числа, которые можно интерпретировать как максимально возможные уровни выполнения элементом с индексом i первой и второй задач соответственно. Кроме того, введем обозначения $b = (b_1, ..., b_N)$ и $v = (v_1, ..., v_N)$.

Теперь определим уровни выполнения задач всей системой в целом. Будем полагать, что уровень выполнения системой первой задачи (B) есть аддитивная функция переменных b_i, а уровень выполнения системой второй задачи (V) есть аддитивная функция переменных v_i:

$$B(b) = \sum_{i=1}^{N} b_i; \quad V(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i.$$

Определим индекс эффективности системы (W) как произведение уровней выполнения системой первой и второй задач:

$$W = VB. \tag{1}$$

Мы пользуемся данным индексом, следуя работе [3] и исходя из того, что данный индекс отражает синергетический эффект, возникающий между элементами, находящимися в одной системе. В самом деле, представим, что один элемент в системе имеет высокий уровень выполнения первой задачи и очень низкий — второй; другой элемент, наоборот, высокий уровень выполнения второй задачи и очень низкий — первой. Каждый элемент по отдельности, вне системы, будет иметь низкую эффективность, в то время как вместе, внутри системы, они смогут достигнуть достаточно большой эффективности.

Будем предполагать, что внутренняя структура каждого элемента такова, что элемент не может увеличивать уровень выполнения одной из двух задач, не уменьшив уровень выполнения другой. Данная предпосылка формализуется понятием структурного ограничения элемента:

$$v_i = v_i^{\max} - \alpha_i b_i,$$

где $\alpha_i > 0,\ v_i^{\max} > 0$, для всех $i = \overline{1, N}$.

Определение. Будем говорить, что два элемента системы одинакового типа, если соответствующие параметры их структурных ограничений совпадают [9—11]. ♦

Для каждого элемента с индексом $i \in \{1, ..., N\}$ введем величину $b_i^{\max} = v_i^{\max}/\alpha_i$. Линейность структурных ограничений позволяет упростить дальнейшие рассуждения.

Мы будем предполагать также, что внешняя среда оказывает влияние на эффективность функционирования системы. Для этого введем общее, условно говоря, ресурсное ограничение. Пусть C — это уровень ресурса, доступный системе при заданных параметрах внешней среды. Предположим, что для выполнения единицы первой задачи системе требуется k_1 единиц ресурса, а для выполнения единицы второй задачи — k_2 единиц ресурса. Кроме того, если некоторый элемент системы выполняет одновременно обе задачи, это влечет за собой наличие дополнительных затрат ресурсов (связанных, например, с необходимостью пространственного разделения процессов выполнения различных задач внутри элемента). Таким образом, общее ресурсное ограничение имеет вид:

$$k_1 \sum_{i=1}^{N} b_i + k_2 \sum_{i=1}^{N} v_i + k_3 \sum_{i=1}^{N} b_i v_i \le C, \tag{2}$$

где $k_1,\ k_2,\ k_3,\ C > 0$.

Рассмотрим выражение $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i$. В нем слагаемое с индексом i может быть рассмотрено как индекс эффективности системы, состоящей из одного единственного элемента с индексом i, вычисленный согласно формуле (1). Иначе говоря, величина $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i$ представляет собой суммарную эффективность заданного набора элементов вне рассматриваемой системы. Поэтому будем называть слагаемое $k_3 \sum_{i=1}^{N} b_i v_i$ в формуле (2) издержками оппортунистического поведения элементов системы. Можно предположить, что ненулевые значения параметра k_3 могут возникнуть в процессе эволюции системы с целью поддержания стабильности этой системы.

Оптимальной стратегией системы будем называть набор (b^*, v^*) таких уровней выполнения задач каждым из элементов, которые при условии существования структурных ограничений и общего ресурсного ограничения позволяют максимизировать эффективность функционирования системы. Таким образом, мы можем свести нашу задачу к классической задаче математического программирования с ограничениями:

$$\begin{cases} W = \sum\limits_{i=1}^{N} b_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} v_i \to \max_{b,\, v}, \\ \forall i = 1, \ldots, N: v_i = v_i^{\max} - \alpha_i b_i, \\ k_1 \sum\limits_{i=1}^{N} b_i + k_2 \sum\limits_{i=1}^{N} v_i + k_3 \sum\limits_{i=1}^{N} b_i v_i \le C, \\ \forall i = 1, \ldots, N: v_i \ge 0, \\ \forall i = 1, \ldots, N: b_i \ge 0. \end{cases}$$

Отметим, что данная оптимизационная задача может быть несколько упрощена (уменьшением числа переменных вдвое) и сведена к следующей задаче максимизации:

$$\begin{cases} W = \sum\limits_{i=1}^{N} b_i \left(\sum\limits_{i=1}^{N} v_i^{\max} - \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i b_i \right) \to \max_b, \\ k_1 \sum\limits_{i=1}^{N} b_i + \sum\limits_{i=1}^{N} (k_2 + k_3 b_i)(v_i^{\max} - \alpha_i b_i) \le C, \\ \forall i = \overline{1, N} : 0 \le b_i \le b_i^{\max}. \end{cases} \tag{3}$$

Будем говорить, что элемент с индексом i специализируется на первой задаче, если $b_i^* = b_i^{\max}$ (равносильно $v_i^* = 0$). Аналогично, будем считать, что элемент с индексом i специализируется на второй задаче, если $v_i^* = v_i^{\max}$ (равносильно $b_i^* = 0$). Если некоторый элемент не специализируется ни на первой, ни на второй задаче, то такой элемент мы будем называть неспециализированным. Будем говорить, что в системе возникла специализация, если хотя бы один элемент этой системы специализируется на одной из задач. Главным образом, нас будет интересовать вопрос возникновения специализации в рассматриваемой системе.

2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые общие утверждения, касающиеся свойств индекса эффективности системы, структуры ресурсного ограничения и свойств решения задачи (3).

Утверждение 1. *Введем обозначение*: $H = \{b \in R^N | \forall i = \overline{1, N} : 0 \leqslant b_i \leqslant b_i^{\max}\}$. *Рассмотрим множество* $A(\overline{W}) = \{b \in H | W(b) \geqslant \overline{W}\}$. *При любом значении* $\overline{W}$ *множество* $A(\overline{W})$ *является выпуклым.* ♦

Фактически, данное утверждение выявляет простую структуру линий уровня рассматриваемого индекса эффективности. Теперь приведем утверждение, описывающее структуру ресурсного ограничения задачи (3).

Доказательство утверждений см. в Приложении.

Утверждение 2. *Рассмотрим ресурсное ограничение задачи* (3).

(а) *Ресурсное ограничение задает замкнутое множество в евклидовом пространстве, границей которого является* $(N - 1)$*-мерный эллипсоид:*

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (b_i - \gamma_i) \ge \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\gamma_i)^2 + \frac{k_2 \sum\limits_{i=1}^{N} v_i^{\max} - C}{k_3},$$

где $\gamma_i = \dfrac{k_1 - k_2\alpha_i + k_3 v_i^{\max}}{2k_3\alpha_i}$, $i = \overline{1, N}$.

(б) *Обозначим через D множество допустимых решений задачи* (3). *Существует такое значение* $C_1 > 0$, *что при любом значении параметра C из множества* $(0, C_1)$, *множество D является пустым, а для всех* $C \ge C_1$ *множество D не пусто. Данное значение* C_1 *может быть найдено следующим образом:*

$$C_1 = k_1 \sum_{i \in S} b_i^{\max} + k_2 \sum_{i \in \{1, \ldots, N\} \setminus S} v_i^{\max},$$

где $S = \{i \in \{1, \ldots, N\} | \alpha_i \ge k_1/k_2\}$. ♦

Далее приведем результаты, описывающие то, как устроено решение задачи (3). В частности, данные результаты являются прямыми следствиями рассмотренных ранее утверждений. Прежде всего, определим множество:

$$G = \{b \in H | k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_2 \langle b, v(b) \rangle = C\}.$$

Утверждение 3. *Пусть* B^* *— множество оптимальных решений задачи* (3), *а* B^{**} *— множество оптимальных решений задачи* (3) *без ресурсного ограничения. Тогда существуют такие значения параметра* C, C_1 и C_2, $0 < C_1 \le C_2$, *что:*

(а) $\forall C \geqslant C_2$: $B^* \subseteq B^{**}$,

(б) $\forall C \in [C_1, C_2)$: $B^* \subseteq G$,

(в) $\forall C \in [0, C_1)$: $B^* = \varnothing$,

где $C_1 = k_1 \sum\limits_{i \in S} b_i^{\max} + k_2 \sum\limits_{i \in \{1, \ldots, N\} \setminus S} v_i^{\max}$,

$C_2 = \min\limits_{b \in B^{**}} \{k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_3 \langle b, v(b) \rangle\}$. ♦

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы относительно того, как устроено решение задачи (3). Прежде всего, существует пороговое значение уровня доступного системе ресурса, такое, что если содержание ресурса во внешней среде опустится ниже данного порогового значения, система перестанет функционировать вообще. Далее, существует второе пороговое значение для уровня доступного ресурса. Если содержание ресурса во внешней среде выше данного значения, то ресурсное ограничение никак не влияет на эффективность системы — реализуется оптимальная стратегия при наличии только структурных ограничений. При любом уровне ресурса, находящемся в промежутке между двумя пороговыми значениями, ресурсное ограничение оказывает влияние на эффективность системы. При этом системой используется все доступное количество ресурса, что выглядит весьма реалистично в рамках практических интерпретаций рассматриваемых моделей.

Далее рассмотрим подробно один важный частный случай предлагаемой модели. Для этого случая проведем полный анализ решения и выявим, в каких случаях и при каких условиях возможно возникновение специализации.

3. СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ ОДНОГО ТИПА

Наибольший интерес представляет случай модели, когда все элементы в системе одинакового типа (см. определение в § 1). В таком случае ни у одного элемента системы нет никакой заранее заданной структурной предрасположенности к выполнению одной из задач относительно других элементов системы. Итак, предположим, что все элементы системы одинакового типа. Нас будет интересовать вопрос возникновения специализации в рассматриваемой системе.

Утверждение 4. *Справедливы положения.*

(а) $C_2 = \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3\left(N - 2\left[\frac{N}{2}\right]\right) \times \frac{b^{\max} v^{\max}}{4}$, *где* $\left[\frac{N}{2}\right]$ *— целая часть числа.*

(б) *Для всех значений параметра C из отрезка* $[C_1, C_2]$ *в оптимуме будет не более одного неспециализированного элемента.*

(в) *Существует значение* $C_3 = \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3 N \frac{b^{\max} v^{\max}}{4}$ *такое, что для всех* $C \in [C_2, C_3)$: $B^* \subset B^{**}$, *а для всех* $C \geq C_3$: $B^* = B^{**}$, *где* $B^{**} = \left\{ b \in H \mid B(b) = \frac{Nb^{\max}}{2} \right\}$. ♦

Таким образом, можно сделать следующие выводы из утверждения 4. Прежде всего, если ресурсное ограничение влияет на оптимальную эффективность системы и позволяет системе существовать, то все элементы системы кроме, возможно, одного, будут специализированными. Далее, при всех $C \geq C_3$ множество решений задачи (3) совпадает с множеством решений задачи (3) без ресурсного ограничения — связным множеством стратегий, где стратегии, в которых хотя бы один элемент специализированный, образуют подмножество меры ноль. При уменьшении значения C от C_3 к C_2 множество оптимальных решений сужается до тех пор, пока мы не придем к ситуации, когда в оптимуме будет не более одного неспециализированного элемента. Мы видим, что по мере уменьшения количества доступного ресурса система будет вести себя таким образом: сначала система будет оставаться неспециализированной, затем каждый элемент также будет оставаться неспециализированным, но уровни выполнения некоторых функций данным элементом будут доминировать над уровнями выполнения других, пока, наконец, каждый элемент не станет специализированным. В конечном итоге, система вымрет от недостатка ресурса. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим

Пример. Пусть система состоит из пяти элементов, каждый из которых характеризуется структурным ограничением $v_i = 2 - b_i$ для всех $i = \overline{1, 5}$. Пусть $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Согласно утверждению 4 получаем, что $C_1 = 10$, $C_2 = 12$, $C_3 = 20$. При любом уровне доступного ресурса меньше 10 системе недостаточно ресурсов для функционирования, и она вымирает. При любом уровне доступного ресурса $C \in [10, 12)$ в оптимуме в системе будет два элемента, специализирующихся на первой функции, два элемента, специализирующихся на второй функции, и один неспециализированный элемент, уровни выполнения первой и второй функции которого равны соответственно $(1 + \sqrt{6 - c/2}$; $1 - \sqrt{6 - c/2})$ либо $(1 - \sqrt{6 - c/2}$; $1 + \sqrt{6 - c/2})$. В данном случае эффективность системы $W = 19 + c/2$. При $C \geq 12$ оптимальными уровнями выполнения первой функции будут все такие допустимые наборы b, что $B(b) = V(b) = 5$. Таким образом, индекс эффективности функционирования системы будет принимать значение 25. При $C \geq 30$ решением задачи будет уже все множество $B^{**} = \{b \in R^5 \mid \forall i = \overline{1, 5}, 0 \leq b_i \leq 2, B(b) = 5\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены и исследованы общие математические модели, описывающие проблемы разделения труда между элементами некоторой абстрактной системы. Введено понятие специализации в рассматриваемых абстрактных системах, сформулирована задача максимизации эффективности функционирования системы и изучены возможности возникновения специализации в оптимуме в зависимости от наличия в модели элементов различных типов и в зависимости от влияния факторов окружающей среды (при предположении о линейности всех рассматриваемых ограничений). Приведены общие результаты, описывающие структуру решения рассматриваемой задачи математического программирования. Детально рассмотрен случай, когда все элементы системы идентичны друг другу. Описано, как и при каких условиях возможно возникновение специализации и как различные параметры модели влияют на переход системы к специализированным состояниям.

Отметим, что рассмотренные в работе абстрактные модели специализации могут быть применены для описания широкого круга проблем, возникающих не только в эволюционной биологии, но и в экономике, истории, социальных науках. Для примера рассмотрим систему научно-учебных учреждений некоторого региона. Элементы этой системы — научно-учебные заведения. Каждое из этих заведений может выполнять одну или несколько функций (например, образовательную или научно-исследовательскую). Каждое научно-учебное заведение может обладать своей уникальной внутренней структурой. Внешняя среда оказывает влияние на систему научно-учебных учреждений наличием различного рода бюджетных ограничений. Задача состоит в том, чтобы определить, каким образом распределить выполнение задач между элементами так, чтобы максимизировать эффективность данной системы. Элементы, специализирующиеся на научной деятельности, можно интерпретировать как научные институты; элементы, специализирующиеся на образовательной деятельности — как высшие учебные заведения, занимающиеся только образовательной деятельностью; неспециализированные элементы — как научно-исследовательские университеты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1

Пусть $b^1, b^2 \in A(\overline{W})$. Покажем, что $\lambda b^1 + (1-\lambda)b^2 \in A(\overline{W})$, где $\lambda \in [0; 1]$. В самом деле, $W(\lambda b^1 + (1-\lambda)b^2) = B(\lambda b^1 + (1-\lambda)b^2)V(\lambda b^1 + (1-\lambda)b^2) = (\lambda B(b^1) + (1-\lambda)B(b^2))(\lambda V(b^1) + (1-\lambda)V(b^2)) = \lambda^2 W(b^1) + (1-\lambda)^2 \times W(b^2) + \lambda(1-\lambda)(B(b^1)V(b^2) + B(b^2)V(b^1))$ [*по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим*] $\geq \lambda^2 W(b^1) + (1-\lambda)^2 W(b^2) + 2\lambda(1-\lambda) \times \sqrt{B(b^1)V(b^1)B(b^2)V(b^2)} \geq$ [*поскольку* $b^1, b^2 \in A(\overline{W})$] $\geq \lambda^2\overline{W} + (1-\lambda)^2\overline{W} + 2\lambda(1-\lambda)\overline{W} = \overline{W}$.

Следовательно, $\lambda b^1 + (1-\lambda)b^2 \in A(\overline{W})$, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2

(а) Непосредственной постановкой структурных ограничений в ресурсное ограничение получаем требуемый результат.

(б) Множество D пусто тогда и только тогда, когда параллелепипед H лежит во внутренности эллипсоида, задаваемого ресурсным ограничением. Параллелепипед H лежит во внутренности эллипсоида тогда и только тогда, когда его каждая крайняя точка (вершина H) лежит во внутренности эллипсоида. Это означает, что

$$\max_{b \in Vert(H)} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (b_i - \gamma_i)^2 < \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_i^2 + \frac{k_2 \sum_{i=1}^{N} v_i^{\max} - C}{k_3},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \max_{b \in \{0,\, b_i^{\max}\}} (b_i - \gamma_i)^2 < \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_i^2 + \frac{k_2 \sum_{i=1}^{N} v_i^{\max} - C}{k_3},$$

$$\sum_{i \in S} \alpha_i (b_i^{\max} - \gamma_i)^2 + \sum_{i \in \{1, \ldots, N\} \setminus S} \alpha_i \gamma_i^2 < \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_i^2 + \frac{k_2 \sum_{i=1}^{N} v_i^{\max} - C}{k_3}.$$

Разрешая неравенство относительно C, получаем:

$$C < k_1 \sum_{i \in S} b_i^{\max} + k_2 \sum_{i \in \{1, \ldots, N\} \setminus S} v_i^{\max},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 3

(а) Множество B^{**} есть компакт. Рассмотрим

$$C_2 = \max_{b \in B^{**}} \{k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_3 \langle b, v(b) \rangle\}.$$

Для всех $C < C_2$ искомая точка из множества B^{**} не будет лежать в множестве D. Напротив, для всех $C \geq C_2$ хотя бы одна точка из множества B^{**} будет принадлежать множеству D. Рассмотрим множество $D \cap B^{**}$ для $C \geq C_2$. Точки из данного множества есть решения задачи (3) без ресурсного ограничения. При добавлении ресурсного ограничения множество допустимых решений либо сужается, либо остается неизменным, следовательно, множество $D \cap B^{**}$ — решение задачи (3) для $C \geq C_2$.

(б) Покажем, что любая точка локального максимума функции $W(b)$ на множестве H является точкой глобального максимума функции $W(b)$ на множестве H.

Пусть b^1 — точка локального максимума функции $W(b)$ на множестве H. Следовательно, существует окрестность $U(b^1)$ такая, что для всех $b \in U(b^1) \cap H$: $W(b) \leq W(b^1)$.

Пусть b^2 — точка глобального максимума функции $W(b)$ на множестве H. Пусть $W(b^2) > W(b^1)$. Тогда, согласно утверждению 1, значение функции $W(b)$ на отрезке $[b^1, b^2]$ должно быть больше или равно $W(b^1)$. Получаем, что на множестве $[b^1, b^2] \cap U(b^1)$ функция $W(b)$ постоянна и равна $W(b^1)$. Из утверждения 1 будет следовать, что на $[b^1, b^2] \cap U(b_1)$ функции $B(b)$ и $V(b)$ будут также постоянными. Эти функции линейные, следовательно, они будут постоянными по всей прямой, содержащей $[b^1, b^2] \cap U(b^1)$. Таким образом, получаем, что $W(b^1) = W(b^2)$ — противоречие.

Пусть точки глобального максимума функции $W(b)$ на множестве H не являются допустимыми и $D = \varnothing$, т. е. $C_1 \le C < C_2$. Пусть решение задачи (3) $b^* \notin G$. Тогда b^* — точка локального максимума функции $W(b)$ на множестве H, следовательно, точка глобального максимума функции $W(b)$ на множестве H. Имеем противоречие.

(в) Следует из утверждения 2, п. (б).

Доказательство утверждения 4

(а) Согласно работе [3] множество $B^{**} = \left\{b \in H \middle| B(b) = \frac{Nb^{\max}}{2}\right\}$.

По определению

$$C_2 = \max_{b \in B^{**}} \{k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_3 \langle b, v(b)\rangle\} =$$

$$= \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3\left(\frac{Nb^{\max}v^{\max}}{2} - \alpha_i \max_{b \in B^{**}} \sum_{i=1}^{M} b_i^2\right) =$$

$$= \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3\left(\frac{Nb^{\max}v^{\max}}{2} - \left[\frac{N}{2}\right] b^{\max}v^{\max} - \right.$$

$$\left. - N - 2\left(\frac{N}{2}\right)\frac{b^{\max}v^{\max}}{4}\right) = \frac{N}{2}(k_1 b^{\max}v^{\max} + k_2 b^{\max}v^{\max}) +$$

$$+ k_3\left(N - 2\left[\frac{N}{2}\right]\frac{b^{\max}v^{\max}}{4}\right).$$

(б) Пусть b^* — решение задачи (3).

По утверждению 3, $b^* \in G$. Предположим, что в оптимуме есть более одного неспециализированного элемента, т. е., $\exists i, j \in \{1, ..., N\}$: $0 < b_i^* < b^{\max}$, $0 < b_j^* < b^{\max}$ и $b_i^* \le b_j^*$. Рассмотрим ε: $0 < \varepsilon < \min\{b_i^*, b^{\max} - b_j^*\}$. Рассмотрим точку b, которая отличается от точки b^* двумя координатами: $b_i = b_i^* - \varepsilon$, $b_j = b_j^* + \varepsilon$. Тогда $B(b) + B(b^*)$, $V(b) = V(b^*)$, $W(b) = W(b^*)$, $b \in H$.

Рассмотрим выражение:

$$k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_3 \langle b, v(b)\rangle =$$

$$= C + k_3((b_i^* - \varepsilon)(v_i^* + \alpha\varepsilon) + (b_i^* + \varepsilon)(v_i^* - \alpha\varepsilon) -$$

$$- b_i^* v_i^* - b_j^* v_j^*) = C + k_3\varepsilon(\alpha b_i^* - \alpha b_j^* + v_j^* - v_i^* - 2\alpha\varepsilon) =$$

$$= C + 2\alpha k_3 \varepsilon((b_i - b_j) - \varepsilon) < C,$$

т. е. $b \in D$ и является решением задачи (3). Однако $b \notin G$, что противоречит п. (б) утверждения 3, что и требовалось доказать.

(в) По определению

$$C_3 = \max_{b \in B^{**}} \{k_1 B(b) + k_2 V(b) + k_3 \langle b, v(b)\rangle\} =$$

$$= \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3\left(\frac{Nb^{\max}v^{\max}}{2} - \frac{Nb^{\max}v^{\max}}{4}\right) =$$

$$= \frac{N}{2}(k_1 b^{\max} + k_2 v^{\max}) + k_3 N\frac{b^{\max}v^{\max}}{4}.$$

Авторы благодарны двум анонимным рецензентам за ценные замечания и комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith J.M.* Optimization theory in evolution // Ann. Rev. Ecol. Syst. — 1978. — Vol. 9. — P. 31—56.
2. *Parker G.A., Smith J.M.* Optimality theory in evolutionary biology // Nature. — 1990. — Vol. 348. — P. 27—33.
3. *Michod R.E., Viossat Y., Solari C.A.,* et al. Life-history evolution and the origin of multicellularity // J. Theor. Biol. — 2006. — Vol. 239. — P. 257—272.
4. *Ispolatov I., Ackermann M., Doebeli M.* Division of labour and the evolution of multicellularity // Proc. R. Soc. London B. — 2012. — Vol. 279. — P. 1768—1776.
5. *Solari C.A., Kessler J.O., Goldstein R.E.* Motility, mixing, and multicellularity // Gen. Program. Evolv. Mach. — 2007. — Vol. 8. — P. 115—129.
6. *Rossetti V., Schirrmeister B.E., Bernasconi M.V., Bagheri H.C.* The evolutionary path to terminal differentiation and division of labor in cyanobacteria // J. Theor. Biol. — 2010. — Vol. 262. — P. 23—34.
7. *Rossetti V., Bagheri H.C.* Advantages of the division of labour for the long-term population dynamics of cyanobacteria at different latitudes // Proc. R. Soc. London B. — 2012. — Vol. 279. — P. 3457—3466.
8. *Новиков Д.А.* Комплексные модели системной оптимизации производственно-экономической деятельности предприятия // Управление большими системами. — 2017. — Вып. 65. — С. 118—152.
9. *Ispolatov I., Madhok V., Doebeli M.* Individual-based models for adaptive diversification in high-dimensional phenotype spaces // J. Theor. Biol. — 2016. — Vol. 390. — P. 97—105.
10. *Gavrilets S.* Rapid Transition towards the Division of Labor via Evolution of Developmental Plasticity // PLOS Comput. Biol. — 2010. — Vol. 6, N 6.
11. *Rueffler C., Hermisson J., Wagner G.P.* Evolution of functional specialization and division of labor // PNAS. — 2012. — Vol. 109. — P. 326—335.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. Д.А. Новиковым.

Алескеров Фуад Тагиевич — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; ординарный профессор, зав. лабораторией, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ alesk@hse.ru,

Тверской Денис Никитович — ст. математик, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; аспирант, стажер-исследователь, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ disa1591@mail.ru.

Поступила в редакцию 16.07.2018, после доработки 06.10.2018.
Принята к публикации 17.10.2018.