



НАБЛЮДАЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ИХ СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

С. В. Акманова

Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова, г. Магнитогорск

✉ svet.akm_74@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы наблюдаемости, построения наблюдателей полного и минимального порядков, стабилизации с наблюдателями нелинейных динамических систем, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, а также нелинейным уравнением выхода. Состояния данных систем содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты, поэтому такие системы называют непрерывно-дискретными, или гибридными динамическими системами управления. Для исследования представленных вопросов выполнен переход от нелинейной гибридной системы к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной динамической системе. Установлены критерий наблюдаемости, достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейных гибридных систем, достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы с построенными асимптотическими наблюдателями. Представлены примеры построения асимптотических наблюдателей и стабилизации расширенной системы с такими наблюдателями.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, полностью наблюдаемая система, наблюдатель, стабилизирующее управление.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные непрерывно-дискретные (гибридные) динамические системы служат адекватными математическими моделями реальных систем управления, функционирование которых носит нелинейный характер, а осуществляемые в них процессы имеют неоднородную природу. Например, это касается систем управления в авиационной, космической, металлургической, экономической и других сферах деятельности [1–4]. Для эффективного управления такими системами необходимо знать полную информацию о векторе состояния гибридной системы. Однако это условие трудно реализуемо, так как на практике зачастую измерению доступны не все компоненты вектора состояния системы. В таких случаях управление при помощи обратной связи по состоянию явля-

ется предпочтительным по сравнению с программным управлением [5], так как позволяет восстановить недоступные для измерения компоненты вектора состояния. Это восстановление называется *оценкой*, а устройство, формирующее на выходе вектор оценки состояния системы, называется *наблюдателем* и представляет собой динамическую систему, оценивающую фазовый вектор наблюдаемой гибридной системы по измеряемому выходу этой системы.

В настоящее время наработан немалый опыт по оцениванию состояний и стабилизации некоторых видов нелинейных гибридных систем. Так, для систем управления, описываемых нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями, предлагаются алгоритмы оценки состояния по данным зашумленных дискретных измерений на основе разновидностей фильтров Калмана и

фильтра частиц [6, 7], для класса нелинейных детерминированных систем управления непрерывного времени с неравномерными дискретными измерениями предложено проектирование импульсного непрерывно-дискретного наблюдателя [8]. Синтез наблюдателя на основе скользящего режима для оценки непрерывного и дискретного состояний нелинейных переключаемых систем управления представлен в работе [9]. Для нелинейных непрерывных систем управления с дискретными измерениями и неопределенными возмущениями предложен синтез управления на основе непрерывного наблюдателя в форме обратной связи [10]. В статье [11] на основе метода матричных систем сравнения и техники дифференциально-разностных линейных матричных неравенств изложены способы оценивания состояний нелинейных непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями и синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и влияния неопределенных возмущений. Кроме того, имеются исследования по стабилизации нелинейных гибридных систем с измеряемым выходом без использования наблюдателей, если эти системы описываются дифференциальными уравнениями с различными нелинейностями и управлением в виде дискретного регулятора обратной связи по состоянию или выходу (см., например, работы [12–14]).

Объектом данного исследования служат нелинейные детерминированные непрерывно-дискретные системы с непрерывным выходом и постоянным шагом дискретизации, состояние которых характеризуется набором из двух различных фазовых векторов, один из которых меняется непрерывно согласно дифференциальным уравнениям, а другой – дискретно с учетом разностных уравнений, содержащих управление. Для подобных систем, не содержащих уравнений выхода, проводились исследования, направленные на поиск оптимального управления (см., например, работы [1, 4] и имеющуюся в них библиографию); кроме того, для указанных систем без измеряемого выхода автором в статьях [15, 16] были установлены достаточные признаки и способы стабилизации. Однако вопросы оценивания состояний и стабилизации указанных систем с непрерывным выходом требуют дополнительного изучения.

В настоящей работе предложены общие подходы к синтезу асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелиней-

ных детерминированных непрерывно-дискретных систем с непрерывным выходом, имеющих постоянный шаг дискретизации, и к решению задач стабилизации указанных систем с использованием асимптотических наблюдателей. Данные подходы основаны на переходе от нелинейной непрерывно-дискретной (гибридной) системы к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной системе и учитывают идеи Д. Люенбергера [17, 18] относительно синтеза наблюдателей.

Новизна проведенного исследования состоит в следующем:

- установлены критерий наблюдаемости нелинейной гибридной системы с непрерывным выходом и необходимое условие наблюдаемости равносильной нелинейной дискретной системы с дискретным выходом;

- установлены достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы с непрерывным выходом и представлены новые модели наблюдателей, учитывающие линейную часть уравнений выхода и нелинейность равносильной дискретной системы;

- установлены достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы, а также разработаны алгоритмы построения асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для такой системы и ее стабилизации с использованием наблюдателей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная (гибридная) система вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), \\ w(t) = \varphi(x(t), y(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ – векторы состояний системы (1); $u(t_k) \in R^q$ – управление (вход); $w(t) \in R^p$ – выход системы ($p \leq n + m$), моменты времени t_k задают на множестве R равномерную сетку с постоянным шагом $h = t_{k+1} - t_k > 0$ и узлами $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по



совокупности переменных, при этом выполняются соотношения

$$f(0, 0) = 0, g(0, 0, 0) = 0, \varphi(0, 0) = 0, \quad (2)$$

т. е. при $u = 0$ система (1) имеет точку равновесия $x = 0, y = 0$.

Рассмотрим систему (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Тогда на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \bar{N}$ ($\bar{N} = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$), при выбранном управлении u (т. е. при заданной последовательности $u(t_k), k \in \bar{N}$) можно найти решение $x(t) = \psi_k(t)$ задачи Коши $x'(t) = f(x(t), y(t_k)), x(t_k) = x_k$, и векторы $x(t_{k+1}) = \psi_k(t_{k+1}), y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k))$. Поэтому при выбранном управлении u состоянием системы (1) в момент времени $t \in [t_k, t_{k+1})$ назовем пару $z(t) = (x(t), y(t_k))$, где $x(t) = \psi_k(t), k \in \bar{N}$.

Важным свойством динамических систем, обеспечивающим безопасность и эффективность их функционирования, служит их (полная) наблюдаемость. Наличие свойства наблюдаемости у системы (1) зависит от шага сетки $h > 0$. Поэтому с учетом изложенного в работе [19] примем следующее

Определение 1. Система (1) называется *наблюдаемой (полностью наблюдаемой)* при заданном $h > 0$, если существует число $l \in N (l \leq n + m)$ такое, что для любых четверок $(u_1(t_k), x_1(t), y_1(t_k), w_1(t)), (u_2(t_k), x_2(t), y_2(t_k), w_2(t))$, заданных на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ и удовлетворяющих системе (1), из равенства входов и выходов

$$u_1(t_k) = u_2(t_k), w_1(t) = w_2(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l},$$

следует равенство соответствующих компонент состояний

$$x_1(t) = x_2(t), y_1(t_k) = y_2(t_k),$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}. \blacklozenge$$

Тогда по известным значениям входа $u(t_k)$ и выхода $w(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}$, можно однозначно определить состояние $z(t)$ при

$t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l}$, системы (1) и сделать выводы о процессах, происходящих в этой системе.

Отметим, что система (1) может быть ненаблюдаемой при некотором $h > 0$, если существует вход такой, что различным состояниям этой системы соответствуют одинаковые выходы, т. е. найдутся различные начальные данные $z_0 = (x_0, y_0)$, $\tilde{z}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и вход $u^*(t_k), k \in \bar{N}$, такие, что для соответствующих состояний $z = z(t)$ и $\tilde{z} = \tilde{z}(t)$ выходы удовлетворяют условию $w(z(t)) \equiv w(\tilde{z}(t))$ при $t \geq 0$.

Основными задачами в настоящей статье являются установление признаков наблюдаемости системы (1), условий существования асимптотических наблюдателей и их построение для этой системы, а также исследование вопроса стабилизации системы (1) с построенными наблюдателями. Для решения поставленных задач предлагается выполнить переход от гибридной системы (1) к равносильной в естественном смысле нелинейной дискретной системе с выходом.

2. ПЕРЕХОД К РАВНОСИЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С ВЫХОДОМ

Исходя из соотношений (2), функции $f(x, y), g(x, y, u), \varphi(x, y)$ в окрестности точек $x = 0, y = 0$ и $x = 0, y = 0, u = 0$ по формуле Тейлора (Маклорена) представимы в виде

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y),$$

$$g(x, y, u) = A_2 x + B_2 y + C u + b(x, y, u),$$

$$\varphi(x, y) = D_1 x + D_2 y + c(x, y),$$

где

$$A_1 = f'_x(0, 0), B_1 = f'_y(0, 0),$$

$$A_2 = g'_x(0, 0, 0), B_2 = g'_y(0, 0, 0), C = g'_u(0, 0, 0),$$

$$D_1 = \varphi'_x(0, 0), D_2 = \varphi'_y(0, 0),$$

при этом гладкие нелинейные функции $a(x, y), b(x, y, u), c(x, y)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|), c(x, y) = o(\|x\| + \|y\|)$$

$$\text{при } \|x\| + \|y\| \rightarrow 0,$$

$b(x, y, u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|)$ при $\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$,

т. е. являются бесконечно малыми более высокого порядка малости, чем $\|x\| + \|y\|$ ($\|x\| + \|y\| + \|u\|$) при $\|x\| + \|y\| \rightarrow 0$ ($\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$).

Здесь и далее запись $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора в соответствующем пространстве действительных чисел, или норму матрицы.

Пусть $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда система (1) равносильна гибридной системе

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = A_2 x_{k+1} + B_2 y_k + C u_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ w(t) = D_1 x(t) + D_2 y_k + c(x(t), y_k), & k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\det A_1 \neq 0$, тогда, применяя оператор сдвига по траекториям системы $x' = f(x, y)$ за время от $t = 0$ до $t = h$ [20], выполним переход от системы (3) к дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 y_k + \\ + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2) y_k + \\ + C u_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \\ w_k = D_1 e^{A_1 h} x_k + (D_1 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + D_2) y_k + \\ + \gamma(x_k, y_k; h), & k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (4)$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_k, y_k; h) &= \\ &= e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds, \end{aligned}$$

причем $x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши $x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$,

$$\begin{aligned} \delta(x_k, y_k, u_k; h) &= \\ &= A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ \gamma(x_k, y_k; h) &= D_1 \varepsilon(x_k, y_k; h) + c(x_{k+1}, y_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Компактная запись системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1} = A(h) z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \\ w_k = D(h) z_k + \gamma(z_k, h), & k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$$D(h) = \begin{bmatrix} D_1 e^{A_1 h} & D_1 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + D_2 \end{bmatrix},$$

где O – нулевая матрица соответствующей размерности.

Используя результаты работы [20], равенства (5), можно доказать, что

$$\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|) \text{ при } \|z\| + \|u\| \rightarrow 0,$$

$$\gamma(z, h) = o(\|z\|) \text{ при } \|z\| \rightarrow 0.$$

Системы (1) и (4) в естественном смысле равносильны, поскольку по решению $(x(t), y_k)$ системы (1) с выходом $w(t)$ можно найти решение (x_k, y_k) системы (4) с выходом w_k и наоборот [15, 20], следовательно, системы (1) и (6) также равносильны. Введем

Определение 2. Система (6) называется *наблюдаемой (полностью наблюдаемой) при заданном $h > 0$* , если существует число $l \in \bar{N}$ ($l \leq n + m$) такое, что для любых троек $(u_k^{(1)}, z_k^{(1)}, w_k^{(1)})$, $(u_k^{(2)}, z_k^{(2)}, w_k^{(2)})$, $k = \overline{0, l}$, удовлетворяющих системе (6), из равенства входов и выходов

$$u_k^{(1)} = u_k^{(2)}, \quad w_k^{(1)} = w_k^{(2)}, \quad k = \overline{0, l},$$

следует равенство состояний

$$z_k^{(1)} = z_k^{(2)}, \quad k = \overline{0, l}. \quad \blacklozenge$$

Тогда справедлива

Теорема 1. Гибридная система (1) наблюдаема при заданном $h > 0$ в том и только том случае, если наблюдаема дискретная система (6) при $h > 0$.

Доказательство. Пусть система (1) наблюдаема при заданном $h > 0$. Введем обозначения $u_i(t_k) = u_k^{(i)}$, $x_i(t_k) = x_k^{(i)}$, $w_i(t_k) = w_k^{(i)}$, $y_i(t_k) = y_k^{(i)}$, где $i = 1, 2$; $k = \overline{0, l}$. Если $w_1(t) = w_2(t)$, $x_1(t) = x_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то $w_k^{(1)} = w_k^{(2)}$, $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$.



Тогда из определения 1 следует: если $u_k^{(1)} = u_k^{(2)}$, $w_k^{(1)} = w_k^{(2)}$, то $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, т. е. $z_k^{(1)} = z_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$. Значит, для любых троек $(u_k^{(1)}, z_k^{(1)}, w_k^{(1)})$, $(u_k^{(2)}, z_k^{(2)}, w_k^{(2)})$, $k = \overline{0, l}$, удовлетворяющих системе (6) при данном $h > 0$, из равенства входов и выходов следует равенство состояний, что означает наблюдаемость системы (6) при $h > 0$.

Пусть теперь система (6) наблюдаема при $h > 0$. Тогда из равенства $z_k^{(1)} = z_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, следует $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, т. е. $x_1(t_k) = x_2(t_k)$, $y_1(t_k) = y_2(t_k)$, и в силу единственности решения задачи Коши $x' = f(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$, $k = \overline{0, l}$, выполняется равенство $x_1(t) = x_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$. Так как $w_k^{(1)} = w_k^{(2)} \Leftrightarrow \varphi(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \varphi(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \Leftrightarrow \varphi(x_1(t_k), y_1(t_k)) = \varphi(x_2(t_k), y_2(t_k)) \Leftrightarrow \varphi(x_1(t), y_1(t_k)) = \varphi(x_2(t), y_2(t_k)) \Leftrightarrow w_1(t) = w_2(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то из определения 2 и приведенного объяснения следует: если $u_1(t_k) = u_2(t_k)$, $w_1(t) = w_2(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, то $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ и $y_k^{(1)} = y_k^{(2)}$, $k = \overline{0, l}$, а значит, $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t_k) = y_2(t_k)$, что означает наблюдаемость системы (1) при $h > 0$. ♦

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ ПОЛНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Здесь и далее условимся рассматривать системы (1) и (6) при некотором значении $h = h_0 > 0$. Тогда системой первого приближения для дискретной системы (6) является система вида

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \\ w_k = D_0 z_k, \quad k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (7)$$

где $A_0 = A(h_0)$, $D_0 = D(h_0)$.

Если пара (A_0, D_0) , или система (7), наблюдаема, то согласно ранговому критерию наблюдаемости линейных стационарных систем [19], выполняется условие

$$\text{rank} \left[D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \right] = n + m.$$

Поэтому имеет место

Теорема 2. Если система (6) наблюдаема, то пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Доказательство. Из условия теоремы следует наблюдаемость системы

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h_0), \\ w_k = D_0 z_k + \gamma(z_k, h_0), \quad k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда, учитывая определение 2, составим из соотношений (8) последовательно $l = n + m$ равенств

$$\begin{cases} w_0 = D_0 z_0 + \gamma(z_0, h_0), \\ w_1 = D_0 A_0 z_0 + D_0 B u_0 + D_0 \xi(z_0, u_0, h_0) + \gamma(z_1, h_0), \\ w_2 = D_0 A_0^2 z_0 + D_0 A_0 B u_0 + D_0 A_0 \xi(z_0, u_0, h_0) + D_0 B u_1 + D_0 \xi(z_1, u_1, h_0) + \gamma(z_2, h_0), \\ \dots \\ w_{n+m-1} = D_0 A_0^{n+m-1} z_0 + \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} B u_i + \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} \xi(z_i, u_i, h_0) + \gamma(z_{n+m-1}, h_0), \end{cases}$$

из которых следует

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_0 A_0 \\ D_0 A_0^2 \\ \dots \\ D_0 A_0^{n+m-1} \end{bmatrix} \cdot z_0 = \begin{bmatrix} w_0 - \gamma(z_0, h_0) \\ w_1 - D_0 B u_0 - D_0 \xi(z_0, u_0, h_0) - \gamma(z_1, h_0) \\ w_2 - D_0 A_0 B u_0 - D_0 A_0 \xi(z_0, u_0, h_0) - D_0 B u_1 - D_0 \xi(z_1, u_1, h_0) - \gamma(z_2, h_0) \\ \dots \\ w_{n+m-1} - \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} B u_i - \sum_{i=0}^{n+m-2} D_0 A_0^{n+m-2-i} \xi(z_i, u_i, h_0) - \gamma(z_{n+m-1}, h_0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку система (8) наблюдаема, то по известным значениям входов $u_k (k = \overline{0, n+m-2})$ и выходов $w_k (k = \overline{0, n+m-1})$ однозначно определяются состояния $z_k (k = \overline{0, n+m-1})$. Тогда в полученном равенстве справа стоит постоянный вектор, а произведение слева представляет собой вектор, компоненты которого являются линейными комбинациями компонент вектора состояния z_0 . Таким образом, имеется $(n+m)p$ равенств относительно компонент однозначно определенного вектора $z_0 \in R^{n+m}$, поэтому только $n+m$ строк матрицы

$$\begin{bmatrix} D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \end{bmatrix}$$

являются линейно независимыми. Следовательно,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D_0^T, A_0^T D_0^T, (A_0^T)^2 D_0^T, \dots, (A_0^T)^{n+m-1} D_0^T \end{bmatrix} = n+m,$$

т. е. пара (A_0, D_0) наблюдаема [19]. ♦

Следствие 1. Если система (6) наблюдаема, то система (7) наблюдаема.

Ниже для краткости формулировок используется обозначение $|A| < 1$, подразумевающее, что все собственные значения λ квадратной матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$.

Исходя из результатов работы [15], теоремы 2 и учитывая подход Д. Люенбергера к синтезу наблюдателей полного порядка для линейных систем, установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Тогда существует матрица $K \in R^{(n+m) \times p}$ такая, что решения системы (6) и системы

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (A_0 - KD_0)v_k + Bu_k + KD_0z_k + \\ &+ \xi(z_k, u_k, h_0), k \in \bar{N}, \end{aligned} \quad (9)$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - v_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q; z_0, v_0 \in R^{n+m}.$$

Доказательство. Положим $p_k = z_k - v_k, k \in \bar{N}$, где z_k, v_k – решения системы (6) и системы (9) с учетом выбранного управления u , т. е. при заданной последовательности $u_k, k \in \bar{N}$. Тогда $p_{k+1} = z_{k+1} - v_{k+1}$, т. е. имеет место система

$$p_{k+1} = (A_0 - KD_0)p_k, k \in \bar{N}. \quad (10)$$

Определим, существует ли матрица $K \in R^{(n+m) \times p}$ такая, что система (10) является асимптотически устойчивой.

По условию теоремы пара (A_0, D_0) наблюдаема, тогда из принципа двойственности Калмана следует полная управляемость пары (A_0^T, D_0^T) , а значит, и полная управляемость пары $(A_0^T, -D_0^T)$. Тогда система

$$z_{k+1} = A_0^T z_k - D_0^T u_k,$$

стабилизируема [15], т. е. существует матрица $K^T \in R^{p \times (n+m)}$ такая, что $|A_0^T - D_0^T K^T| < 1$. Тогда $|A_0 - KD_0| < 1$, где $K \in R^{(n+m) \times p}$ и, следовательно, система (10) является асимптотически устойчивой. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q; z_0, v_0 \in R^{n+m}$. ♦

Следствие 2. Если система (6) наблюдаема, то для нее существует система (9).

Систему (9) назовем *наблюдателем системы* (6), при этом система (9) является асимптотическим наблюдателем полного порядка, поскольку вектор $v_k \in R^{n+m}$ оценки вектора состояния системы (6) асимптотически сходится к вектору состояния $z_k \in R^{n+m}$ этой системы. Динамическая система (9) является *асимптотическим наблюдателем полного порядка* и для гибридной системы (1) на промежутке дискретного времени $[t_0; +\infty)$, так как состояния $v_k = v(t_k), k \in \bar{N}$, системы (9) рассматриваются как оценки соответствующих состояний системы (6), а состояния систем (1) и (6) совпадают в моменты времени $t = t_k, k \in \bar{N}$.

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу асимптотической стабилизации нулевого положения равновесия системы (1) при помощи динамической связи по выходу с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (9) и покажем применимость принципа разделения для решения этой задачи. Данный принцип предполагает стабилизацию системы с помощью отдельного построения стабилизирующей обратной связи по состоянию и наблюдателя для оценки состояния системы с последующей подстановкой оценки состояния в обратную связь [21]. С учетом изложенного в работе [15] имеет место

Теорема 4. Пусть система (6) имеет стабилизирующее управление $u_k = Fz_k, k \in \bar{N}$, с матрицей $F \in R^{q \times (n+m)}$ и является наблюдаемой,



при этом система (9) является наблюдателем системы (6). Тогда решение $x=0$, $y=0$, $v=0$ расширенной системы (1), (9) с управлением $u(t_k) = Fv(t_k)$, $k \in \bar{N}$, является асимптотически устойчивым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_k = Fv_k$, $k \in \bar{N}$. Запишем систему (6) (без учета выхода) и систему (9) в переменных z_k , p_k , где $p_k = z_k - v_k$, $k \in \bar{N}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFp_k + \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0), \\ p_{k+1} = (A_0 - KD_0)p_k, \quad k \in \bar{N}, \end{cases} \quad (11)$$

или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} z_k \\ p_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$k \in \bar{N},$$

где $G = \begin{bmatrix} A_0 + BF & -BF \\ O & A_0 - KD_0 \end{bmatrix}$ – блочно-треугольная матрица порядка $2(n+m)$.

Тогда $\sigma(G) = \sigma(A_0 + BF) \cup \sigma(A_0 - KD_0)$ – спектр матрицы G . Поскольку $u_k = Fz_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление системы (6), то $|A_0 + BF| < 1$ [15]. Учитывая наблюдаемость системы (6), теорему 2 и доказательство теоремы 3, установим, что $|A_0 - KD_0| < 1$. Следовательно, $|G| < 1$.

$$\text{Пусть} \quad \bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}.$$

Тогда, учитывая, что $\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|)$ при $\|z\| + \|u\| \rightarrow 0$, установим: $\xi(z_k, F(z_k - p_k), h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$, значит,

$$\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|) \quad \text{при} \quad \|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0.$$

Тогда, согласно изложенному в работе [20], система (12), иначе система (11), имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $p=0$. В таком случае расширенная система (6), (9) с управлением $u_k = Fv_k$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $v=0$. Значит, соответствующая ей расширенная система (1), (9) с управлением $u(t_k) = Fv(t_k)$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x=0$, $y=0$, $v=0$ [20]. ♦

Отметим, что стабилизация динамической системы (1) с наблюдателем имеет ряд преимуществ по сравнению с ее стабилизацией без наблюдателя. Одно из них связано с повышением

надежности управления, при этом под надежностью управления системой понимается свойство, характеризующее систему с точки зрения возможности достижения поставленной цели управления [22]. А именно, во всех реальных системах, в том числе и тех, моделью которых служит система (1), всегда присутствуют внутренние шумы [23]. Эти шумы являются случайными воздействиями, которые не могут быть отражены в математической модели системы, но могут приводить к существенным изменениям в ее поведении, если, например, параметр h системы (1) находится вблизи точки бифуркации. При этом если вектор выхода $w(t)$ имеет размерность $p < n+m$, то измерению доступны не все компоненты вектора состояния системы (1), а лишь некоторые их линейные комбинации, тогда стабилизирующее управление, построенное по неполным данным о состоянии системы, может не дать желаемого результата [21]. Если же для стабилизации системы (1) использовать наблюдатель, то его состояние в некоторый момент времени является оценкой состояния системы в этот момент времени, т. е. наблюдатель моделирует систему в реальном времени и оценивает все компоненты вектора состояния этой системы, реализуя качественную обратную связь, особенно если этот наблюдатель является асимптотическим. Такой наблюдатель обеспечивает асимптотическое по времени убывание ошибки оценки состояния системы (1), а значит, задача стабилизации системы (1) с наблюдателем решается успешно. К тому же, поскольку стабилизация системы с наблюдателем позволяет восстановить недоступные для измерения компоненты вектора состояния, то исключается установка в реальной системе дополнительных физических датчиков и тем самым улучшаются эксплуатационные и стоимостные характеристики системы управления [24].

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Требование к пониженной размерности наблюдателя является актуальным в теории автоматического управления, так как наблюдатель пониженного порядка позволяет упростить анализ и синтез динамической системы, снизить требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором реализуется этот наблюдатель, сократить время оценки фазового вектора системы [25].

Построение наблюдателя полного порядка для системы (1) учитывало линейную часть выхода $w_k \in R^p$ и нелинейную функцию $\xi(z_k, u_k, h_0)$ в системе (6) (см. § 3). Применим эту идею и к построению наблюдателя пониженного порядка. Имеем: $w_k \in R^p$, $z_k \in R^{n+m}$, тогда линейная часть выхода $D_0 z_k$ представляет собой p линейных комбинаций от $n+m$ переменных состояния, поэтому в общем случае необходимо восстановить не более чем $n+m-p$ переменных состояния. Данная идея реализуется при синтезе наблюдателя пониженного порядка, при этом наблюдатель порядка $n+m-p$ считается наблюдателем минимального порядка [18]. Будем называть наблюдатель минимального порядка также минимальным наблюдателем.

Для линейных динамических систем без возмущений построение минимальных наблюдателей представлено в работах [17, 18, 25, 26] и др. Воспользуемся подходом Д. Люенбергера, изложенным в работе [26], и идеей синтеза системы (9) для построения минимального наблюдателя нелинейной дискретной системы (6). Для этого будем полагать, что пара (A_0, D_0) наблюдаема и выберем матрицу $M \in R^{r \times (n+m)}$, где $r \geq n+m-p$, так, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} = n+m. \quad (13)$$

Пусть $s_k = Mz_k$, тогда выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} s_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} z_k \quad (14)$$

и, в силу полноты ранга матрицы $\begin{bmatrix} M^T & D_0^T \end{bmatrix}$, для восстановления вектора z_k достаточно построить оценку вектора s_k . Для простоты рассуждений положим, что $r = n+m-p$, тогда из равенства (14) следует

$$z_k = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix},$$

и если полагать, что $\bar{s}_k$ – оценка вектора s_k , то оценка фазового вектора z_k системы (6) будет иметь вид

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{s}_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для оценки вектора s_k будем использовать наблюдатель порядка $n+m-p$ вида

$$\bar{s}_{k+1} = L\bar{s}_k + ED_0 z_k + Tu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0), \quad (16)$$

где L, E, T, M – постоянные матрицы, являющиеся параметрами наблюдателя (16) и подлежащие дальнейшему определению. Тогда справедлива

Теорема 5. Пусть пара (A_0, D_0) наблюдаема. Тогда существуют матрицы $L \in R^{(n+m-p) \times (n+m-p)}$, $E \in R^{(n+m-p) \times p}$, $T \in R^{(n+m-p) \times q}$, $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ такие, что решения системы (6) и системы (16) удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Mz_k - \bar{s}_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, z_0 \in R^{n+m}, \bar{s}_0 \in R^{n+m-p}.$$

Доказательство. Пара (A_0, D_0) наблюдаема, тогда существует матрица $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$, для которой выполняется условие (13). Пусть $s_k = Mz_k$, где $z_k (k \in \bar{N})$ – решение системы (6), тогда ошибка наблюдения $p_k = s_k - \bar{s}_k$ удовлетворяет разностному уравнению $p_{k+1} = s_{k+1} - \bar{s}_{k+1}$, т. е. с учетом формулы (16),

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= MA_0 z_k + MBu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0) - \\ &- (L\bar{s}_k - Ls_k + LMz_k + ED_0 z_k + Tu_k + M\xi(z_k, u_k, h_0)), \\ p_{k+1} &= Lp_k + (MA_0 - LM - ED_0)z_k + (MB - T)u_k. \end{aligned}$$

Для того чтобы ошибка наблюдения стремилась к нулю, выберем параметры наблюдения из условий

$$\begin{cases} |L| < 1, \\ ED_0 = MA_0 - LM, \\ T = MB. \end{cases}$$

Поскольку пара (A_0, D_0) наблюдаема, то рассуждая аналогично изложенному в работах [17, 18], можно установить, что система данных условий, с учетом формулы (13), разрешима. В таком случае система $p_{k+1} = Lp_k$, $k \in \bar{N}$, асимптотически устойчива, значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, p_0 \in R^{n+m-p}, \quad \text{т. е.}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Mz_k - \bar{s}_k\| = 0 \quad \forall u_k \in R^q, z_0 \in R^{n+m}, \bar{s}_0 \in R^{n+m-p}. \quad \blacklozenge$$

Систему (16) назовем *асимптотическим наблюдателем минимального порядка системы (6) (системы (1))* или *асимптотическим минимальным наблюдателем системы (6) (системы (1))*, оценивающим вектор Mz_k (вектор $Mz(t_k)$) на промежутке дискретного времени $[t_0; +\infty)$, где $t_k = h_0 k$, $k \in \bar{N}$.



Для синтеза наблюдателя (16) можно воспользоваться следующим алгоритмом [26]:

1. Найти матрицу $K \in R^{(n+m) \times p}$ такую, что $|A_0 - KD_0| < 1$, и построить матрицу $\Lambda = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_{n+m}\}$, где $\mu_1, \dots, \mu_{n+m}$ – собственные значения матрицы $A_0 - KD_0$.

2. Найти матрицу $P \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ левых собственных векторов матрицы $A_0 - KD_0$, при этом $P(A_0 - KD_0) = \Lambda P$.

3. Составить матрицу M , выбрав $n+m-p$ строк из матрицы P так, чтобы $M(A_0 - KD_0) = \Lambda_M M$ и выполнялось условие (13), где Λ_M – матрица порядка $n+m-p$, являющаяся подматрицей матрицы Λ , которая соответствует матрице M .

4. Найти матрицы $L = \Lambda_M$, $E = MK$, $T = MB$ и составить наблюдатель (16).

Замечание. Параметры наблюдателя (16) можно находить и по другому алгоритму: сначала выбрать произвольно ненулевую матрицу $L \in R^{(n+m-p) \times (n+m-p)}$, для которой выполняется условие $|L| < 1$, и постоянную матрицу $E \in R^{(n+m-p) \times p}$, затем из условия $ED_0 = MA_0 - LM$ найти неизвестную матрицу $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ и проверить выполнимость условия (13), а затем найти матрицу $T = MB \in R^{(n+m-p) \times q}$.

Рассмотрим вопрос стабилизации системы (1) с наблюдателем (16).

6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

Учитывая выражение (15), найдем оценку $\bar{z}_k = \bar{z}(t_k)$ фазового вектора системы (1) в моменты времени $t_k = h_0 k$, $k \in \bar{N}$. Тогда вопрос стабилизации системы (1) с наблюдателем (16) сводится к вопросу стабилизации расширенной системы (1), (16), при этом с учетом принципа разделения и изложенного в работе [15] имеет место

Теорема 6. Пусть система (6) имеет стабилизирующее управление $u_k = Fz_k$, $k \in \bar{N}$, с матрицей $F \in R^{q \times (n+m)}$ и является наблюдаемой, при этом система (16) является минимальным наблюдателем системы (6). Тогда решение $x=0$, $y=0$, $\bar{s}=0$ расширенной системы (1), (16) с

управлением $u(t_k) = F\bar{z}(t_k)$, $k \in \bar{N}$, является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Согласно теореме 2 пара (A_0, D_0) наблюдаема, при этом система (16) – наблюдатель системы (6), тогда для матрицы $M \in R^{(n+m-p) \times (n+m)}$ в формуле (16) выполняются условия (13) и (15). Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} &= \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ D_0 z_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{s}_{k+1} \\ D_0 \bar{z}_{k+1} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} p_{k+1} = Sp_{k+1}, \end{aligned}$$

где $S = \begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$. Отсюда получим $\bar{z}_k = z_k - Sp_k$, где $p_k = s_k - \bar{s}_k$, $k \in \bar{N}$.

Запишем систему (6) (без учета выхода) и систему (16), с учетом доказательства теоремы 5, в переменных z_k, p_k с $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, тогда $z_{k+1} = A_0 z_k + BF(z_k - Sp_k) + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0)$, т. е. $z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFSp_k + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0)$, и $p_{k+1} = Lp_k$, $k \in \bar{N}$, где $|L| < 1$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_{k+1} = (A_0 + BF)z_k - BFSp_k + \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0), \\ p_{k+1} = Lp_k, \quad k \in \bar{N}, \end{cases}$$

или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} z_k \\ p_k \end{bmatrix} + \bar{\xi}(z_k, p_k, h_0), \quad k \in \bar{N},$$

где $G = \begin{bmatrix} A_0 + BF & -BFS \\ O & L \end{bmatrix}$ – матрица порядка $2(n+m)-p$, $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = \begin{bmatrix} \xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0) \\ O \end{bmatrix}$.

Поскольку $u_k = Fz_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление системы (6), то $|A_0 + BF| < 1$ [15], $|L| < 1$, значит, $|G| < 1$. При этом $\xi(z_k, F(z_k - Sp_k), h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$, тогда $\bar{\xi}(z_k, p_k, h_0) = o(\|z_k\| + \|p_k\|)$ при $\|z_k\| + \|p_k\| \rightarrow 0$. Следовательно, полученная система имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $p=0$ [20]. Тогда расширенная система (6), (16) с управлением $u_k = F\bar{z}_k$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $z=0$, $\bar{s}=0$, значит, расширенная система (1), (16) с управлением $u_k = F\bar{z}(t_k)$, $k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x=0$, $y=0$, $\bar{s}=0$ [20]. ♦

7. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу построения асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t_k) + y^2(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) - y(t_k) + 2u(t_k) + u(t_k)y(t_k), \\ w(t) = 4x(t) + 3y(t_k) - 2x(t)y(t_k), & k \in \bar{N}, \end{cases}$$

$$x, y, w \in R,$$

и задачу стабилизации этой системы с построенными наблюдателями.

Из теорем 3 и 5 следует, что решение задачи построения наблюдателей возможно, если пара (A_0, D_0) наблюдаема, т. е. если $\text{rank}[D_0^T, A_0^T D_0^T] = 2$. Заметим,

что при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ данная система равносильна дискретной системе, компактная запись которой имеет вид (8), где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\xi(z_k, u_k, h_0) = \begin{bmatrix} y_k^2/2 \\ -y_k^2/2 + u_k y_k \end{bmatrix},$$

$$D_0 = [6 \quad 1], \quad \gamma(z_k, h_0) = 3y_k^2 - 3x_k y_k - y_k^3.$$

Поэтому при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ пара (A_0, D_0) наблюдаема.

Пусть $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, тогда $A_0 - KD_0 =$

$$= \begin{bmatrix} 1,5 - 6k_1 & -0,5 - k_1 \\ -1,5 - 6k_2 & -0,5 - k_2 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \text{характеристическое}$$

уравнение полученной матрицы можно записать в виде

$$\mu^2 + (6k_1 + k_2 - 1)\mu + 1,5(k_1 - 3k_2 - 1) = 0.$$

Найдем значения k_1, k_2 такие, чтобы $|\mu_{1,2}| < 1$.

Например, если $\mu_1 = -\frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{3}$ то $K = \begin{bmatrix} 79/342 \\ -25/114 \end{bmatrix}$.

Значит, получим следующий наблюдатель второго порядка (9) для данной системы:

$$\begin{cases} v(t_{k+1,1}) = \frac{13}{114}v(t_{k,1}) - \frac{125}{171}v(t_{k,2}) + \frac{79}{57}x(t_k) + \\ + \frac{79}{342}y(t_k) + \frac{1}{2}y^2(t_k), \\ v(t_{k+1,2}) = -\frac{7}{38}v(t_{k,1}) - \frac{16}{57}v(t_{k,2}) + 2u(t_k) - \frac{25}{19}x(t_k) - \\ - \frac{25}{114}y(t_k) - \frac{1}{2}y^2(t_k) + u(t_k)y(t_k), & k \in \bar{N}. \end{cases} \quad (17)$$

Используя изложенное в работах [15] или [16], построим стабилизирующее управление для системы $z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h_0)$. Так, применяя алгоритм, изложенный в статье [16] (полагая $g = [1 \ 0], \lambda_1 = -\frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$), построим стабилизирующее управление

$$u_k = \frac{53}{24}x_k - \frac{7}{24}y_k, \quad k \in \bar{N}.$$

Тогда, согласно теореме 4, стабилизирующим управлением для данной системы с наблюдателем (17) является

$$u(t_k) = \frac{53}{24}v(t_{k,1}) - \frac{7}{24}v(t_{k,2}), \quad k \in \bar{N}.$$

Действительно, равносильная данной системе при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ соответствующая дискретная система (6) с наблюдателем (17) и найденным стабилизирующим управлением примет вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1,1} \\ v_{k+1,2} \end{bmatrix} = \bar{G} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ v_{k,1} \\ v_{k,2} \end{bmatrix} + \eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}),$$

где

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 53/12 & -7/12 \\ 79/57 & 79/342 & 13/114 & -125/171 \\ -25/19 & -25/114 & 965/228 & -197/228 \end{bmatrix},$$

$$\eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{y_k^2}{2} \\ -\frac{y_k^2}{2} + \frac{53}{24}v_{k,1}y_k - \frac{7}{24}v_{k,2}y_k \\ \frac{y_k^2}{2} \\ -\frac{y_k^2}{2} + \frac{53}{24}v_{k,1}y_k - \frac{7}{24}v_{k,2}y_k \end{bmatrix},$$

при этом $\sigma(\bar{G}) = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ и

$\eta(x_k, y_k, v_{k,1}, v_{k,2}) = o(|x_k| + |y_k| + |v_{k,1}| + |v_{k,2}|)$ при $|x_k| + |y_k| + |v_{k,1}| + |v_{k,2}| \rightarrow 0$, что и означает асимптотическую устойчивость нулевого решения расширенной дискретной системы с наблюдателем (17). Тогда, согласно теореме 4, данная нелинейная гибридная система с наблюдателем (17) при управлении

$u(t_k) = \frac{53}{24}v(t_{k,1}) - \frac{7}{24}v(t_{k,2}), \quad k \in \bar{N}$, имеет асимптотически устойчивое решение $x = 0, y = 0, v = 0$.



Построим минимальный наблюдатель порядка $n + m - p = 1$ вида (16) для данной системы. Для синтеза такого наблюдателя воспользуемся приведенным в § 5 алгоритмом и матрицей $K = \begin{bmatrix} 79/342 \\ -25/114 \end{bmatrix}$, тогда $\Lambda = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -21 & 25 \end{bmatrix}$, $M = [3 \ 10]$, $\Lambda_M = -\frac{1}{2}$, $E = -\frac{3}{2}$, $ED_0 = \begin{bmatrix} -9 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $T = 20$. Следовательно, иско-мый наблюдатель для оценки вектора $s(t_k) = Mz(t_k)$ данной системы имеет вид

$$\bar{s}_{k+1} = -\frac{1}{2}\bar{s}_k - 9x_k - \frac{3}{2}y_k + 20u_k - \frac{7}{2}y_k^2 + 10u_k y_k. \quad (18)$$

Рассмотрим матрицу $\begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, тогда

$$\begin{bmatrix} M \\ D_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/57 & 10/57 \\ 2/19 & -1/19 \end{bmatrix}, \text{ и оценка (15) фазового}$$

вектора $z_k = z(t_k)$ данной системы примет вид

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/57 & 10/57 \\ 2/19 & -1/19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}_k \\ D_0 z_k \end{bmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_k = -\frac{1}{57}\bar{s}_k + \frac{20}{19}x_k + \frac{10}{57}y_k, \\ \bar{y}_k = \frac{2}{19}\bar{s}_k - \frac{6}{19}x_k - \frac{1}{19}y_k. \end{cases}$$

Пусть $u_k = \frac{53}{24}x_k - \frac{7}{24}y_k$, $k \in \bar{N}$, – стабилизирующее управление соответствующей системы (6) при

$h_0 = \ln \frac{3}{2}$. Составим стабилизирующее управление

$$u_k = \frac{53}{24}\bar{x}_k - \frac{7}{24}\bar{y}_k, \text{ иначе } u_k = \frac{29}{12}x_k + \frac{29}{72}y_k - \frac{5}{72}\bar{s}_k,$$

$k \in \bar{N}$. Тогда при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ расширенная система,

составленная из равносильной дискретной системы и построенного наблюдателя (18) при данном управлении примет вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \bar{s}_{k+1} \end{bmatrix} = \bar{G} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \bar{s}_k \end{bmatrix} + \eta(x_k, y_k, \bar{s}_k),$$

где

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{11}{36} & -\frac{5}{36} \\ \frac{118}{3} & \frac{59}{9} & -\frac{17}{9} \end{bmatrix},$$

$$\eta(x_k, y_k, \bar{s}_k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_k^2 \\ -\frac{7}{72}y_k^2 - \frac{5}{72}\bar{s}_k y_k + \frac{29}{12}x_k y_k \\ \frac{19}{36}y_k^2 - \frac{25}{36}\bar{s}_k y_k + \frac{145}{6}x_k y_k \end{bmatrix},$$

$$\sigma(\bar{G}) = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right\} \text{ и } \eta(x_k, y_k, \bar{s}_k) = o(|x_k| + |y_k| + |\bar{s}_k|)$$

при $|x_k| + |y_k| + |\bar{s}_k| \rightarrow 0$, значит, построенная расширен-ная система с наблюдателем имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Тогда, согласно теореме

6, исходная гибридная система при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ с построенным минимальным наблюдателем (18) при стабилизирующем управлении

$u_k = \frac{29}{12}x_k + \frac{29}{72}y_k - \frac{5}{72}\bar{s}_k$, $k \in \bar{N}$, имеет также асимптотически устойчивое нулевое решение. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлены критерий наблюдаемости нелинейной детерминированной непрерывно-дискретной (гибридной) системы с непрерывным выходом, имеющей постоянный шаг дискретизации, и необходимое условие наблюдаемости равносильной нелинейной дискретной системы с дискретным выходом. Представлены математические модели и достаточные признаки существования асимптотических наблюдателей полного и минимального порядков для нелинейной гибридной системы, а также достаточные признаки стабилизации нелинейной гибридной системы с построенными наблюдателями. На конкретном примере продемонстрированы алгоритмы построения асимптотических наблюдателей и представлены соответствующие расширенные нелинейные системы управления с наблюдателями, имеющие асимптотически устойчивые нулевые решения.

Полученные результаты могут быть полезны в решении вопросов эффективного управления нелинейными детерминированными гибридными динамическими системами с постоянным шагом дискретизации, в частности в решении вопроса управления данными системами в режиме бифуркаций [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными

- системами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 7. – С. 57–66. [Bortakovskii, A.S., Panteleev, A.V. Sufficient Conditions for Optimal Control of Batch Systems // Automation and Remote Control. – 1987. – No. 7. – P. 57–66. (In Russian)]
2. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вест. Пермского ун-та. Экономика. – 2011. – № 2(9). – С. 13–23. [Maksimov, V.P., Chadov, A.A. Hybrid Models in Problems of Economic Dynamics // Bulletin of Perm University. – 2011. – No. 2(9). – P. 13–23. (In Russian)]
3. Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др. Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы. – 2019. – № 2 (43). – С. 25–34. [Logunova, O.S., Agapitov, E.B., Barankova, I.I. et al. Mathematical Models for Investigation of the Heat Condition of Objects and Heat Processes Control // Electrotechnical Systems and Complexes. – 2019. – No. 2 (43). – P. 25–34. (In Russian)]
4. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Тр. МАИ. – 2020. – Вып.113. – DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17> [Bortakovsky, A.S., Uryupin, I.V. Routes Optimization of Continuous-Discrete Movement of Controlled Objects in the Presence of Obstacles // Trudy MAI. – 2020. – No. 113. – DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17> (In Russian)]
5. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – 240 с. [Aleksandrov, V.V., Lemak, S.S., Parusnikov, N.A. Lektsii po mekhanike upravlyaemykh sistem. – Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2011. – 240 s. (In Russian)]
6. Nielsen, M., Ritschel, T., Christensen, I., et al. State Estimation Methods for Continuous-Discrete Nonlinear Systems Involving Stochastic Differential Equations // arXiv:2205.02730v1. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2205.02730
7. Wang, Y., Zhang, H., Mao, X., et al. Accurate Smoothing Methods for State Estimation of Continuous-Discrete Nonlinear Dynamic Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2019. – Vol. 64, iss. 10. – P. 4284–4291.
8. Farza, M., Saad, M.M., Fall, M.L., et al. Continuous-Discrete Time Observers for a Class of MIMO Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2014. – Vol. 59, iss. 4. – P. 1060–1065. – DOI: 10.1109/TAC.2013.2283754
9. Davila, J., Pisano, A., Usai, E. Finite-Time Observation of the Continuous and Discrete State for a Class of Nonlinear Switched Dynamics // IFAC Proceedings Volumes. – 2009. – Vol. 42, no.17. – P. 358–363.
10. Malikov, A.I. Observer Based Control for Continuous Systems with Discrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol. 44, no. 5. – P. 1728–1737.
11. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2025. – № 3. – С. 3–19. [Malikov, A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous-Discrete Systems with Uncertain Disturbances // Automation and Remote Control. – 2025. – Vol. 86, no. 3. – P. 191–202.]
12. Qian, C., Du, H. Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems via Linear Sampled-Data Control // IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, no. 11. – P. 2934–2939.
13. Karafyllis, L., Krstic, M. Nonlinear Stabilization under Sampled and Delayed Measurements, and with Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold // IEEE Transact. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, no. 5. – P. 1141–1154.
14. Seifullaev, R.E., Fradkov, A.L. Event-Triggered Control of Sampled-Data Nonlinear Systems // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, no. 14. – P. 12–17.
15. Акманова С.В. О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 41–58. [Akmanova, S.V. Stabilization of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems with a Constant Sampling Step // Automation and Remote Control. – 2024. – Vol. 85, no. 9. – P. 864–878.]
16. Акманова С.В. Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2025. – Т. 52. – С. 3–20. [Akmanova, S.V. On Controllability and Stabilization of Nonlinear Continuous-discrete Dynamic Systems. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2025. – Vol. 52. – P. 3–20. (In Russian)]
17. Luenberger, D.G. Determining the State of Linear System with Observers of Low Dynamic Order: PhD Thesis. – Stanford: Stanford University, 1963.
18. O'Reilly. Observers for Linear Systems. – London: Academic Press, 1983. – 245 p.
19. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 306 с. [Leonov, G.A., Shumafov, M.M. Problemy stabilizatsii lineinykh upravlyaemykh sistem. – SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2002. – 306 s. (In Russian)]
20. Юмагулов М.Г., Акманова С.В. Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфим. мат. журн. – 2023. – Т. 15, № 2. – С. 85–100. [Yumagulov, M.G., Akmanova, S.V. On the Stability of Equilibrium Points of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamical Systems // Ufa Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 15, no. 2. – P. 85–99.]
21. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №7. – С. 3–42. [Golubev, A.E., Krishchenko, A.P., Tkachev, S.B. Stabilization of Nonlinear Dynamic Systems Using the System State Estimates Made by the Asymptotic Observer // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66, no. 7. – P. 1021–1058.]
22. Берколайко М.З., Долгих Ю.В., Иванова К.Г. Трудности в смысле И.Б. Руссмана и оценка надежности управления // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 5–9. [Berkolajko, M.Z., Dolgih, Yu.V., Ivanova, K.G. Difficulties in the Sense I.B. Russman and the Estimation of the Reliability of Management // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. – 2008. – № 2. – P. 5–9. (In Russian)]
23. Захарова А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Изв. вузов «ПНД». – 2006. – Т. 14, № 5. – С. 44–60. [Zakharova, A.S., Vadivasova, T.E., Anishchenko, V.S. Influence of Noise on Chaotic Self-Sustained Oscillations in the Regime of Spiral Attractor // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2006. – Vol. 14, no 5. – P. 44–60. (In Russian)]



24. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006. – 272 с. [Krasnova, S.A., Utkin, V.A. Kaskadnyi sintez nablyudatelei sostoyaniya dinamicheskikh sistem. – Moscow: Nauka, 2006. – 272 s. (In Russian)]
25. Каменщиков М.А. Методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023. – 156 с. [Kamenshchikov, M.A. Metody postroeniya optimal'nykh nablyudatelei ponizhennogo poriyadka dlya lineynykh statsionarnykh dinamicheskikh sistem: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. – Moscow: MGU im. M.V. Lomonosova, 2023. – 156 s. (In Russian)]
26. Фомичев В.В. Функциональные наблюдатели и наблюдатели состояния при неопределенности: дисс. ... док. физ.-мат. наук. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. – 327 с. [Fomichev, V.V. Funktsional'nye nablyudateli i nablyudateli sostoyaniya pri neopredelennosti: diss. ... dok. fiz.-mat. nauk. – Moscow: MGU im. M.V. Lomonosova, 2009. – 327 s. (In Russian)]
27. Зулпугаров М.–Г.М., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Пример решения обратной задачи теории бифуркаций в динамической системе с шумом // Изв. вузов «ПНД». –

2005. – Т. 13, № 5–6. – С. 3–23. [Zulpukarov, M.M., Malinetskiy, G.G., Podlazov, A.V. Bifurcation Theory Inverse Problem in a Noisy Dynamical System. Example Solution // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2005. – Vol. 13, iss. 6. – P. 3–23. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С. А. Красновой.

*Поступила в редакцию 30.11.2025,
после доработки 12.03.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.*

Акманова Светлана Владимировна – канд. пед. наук, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск,
✉ svet.akm_74@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7211-1610>

© 2026 г. Акманова С. В.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная

OBSERVABILITY OF NONLINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS AND THEIR STABILIZATION USING ASYMPTOTIC OBSERVERS

S. V. Akmanova

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia

✉ svet.akm_74@mail.ru

Abstract. This paper considers nonlinear dynamic systems described by a set of differential and difference equations and a nonlinear output equation. The states of such systems contain both continuous and discrete components, so they are called continuous–discrete, or hybrid, dynamic control systems. For this class of systems, the issues of observability, design of full- and minimum-order observers, and stabilization with observers are investigated. A transition is performed from an original nonlinear hybrid system to a nonlinear discrete-time dynamic system equivalent in a natural sense. An observability criterion, sufficient conditions for the existence of full- and minimum-order asymptotic observers for nonlinear hybrid control systems, and sufficient conditions for the stabilization of a nonlinear hybrid system with designed asymptotic observers are established. Examples of designing asymptotic observers and stabilizing the augmented system with such observers are provided.

Keywords: continuous–discrete system, hybrid system, fully observable system, observer, stabilizing control.