

АНАЛИЗ ПРОТОКОЛА СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р. П. Агаев*, Д. К. Хомутов**

***Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

*✉ agaraf3@gmail.com, **✉ homutov_dk@mail.ru

Аннотация. Введен новый протокол согласования характеристик в многоагентной системе с дополнительными связями и запаздыванием. Согласно этому протоколу, в многоагентной системе агенты получают информацию от части агентов без задержки, а от остальных – с некоторым запаздыванием. Такой протокол является частным случаем более общей модели, которая применяется при исследовании транспортного потока, прогнозировании динамики цен на рынке товаров, описании биологических и эпидемиологических процессов и т. п. В работе получено условие независимости сходимости протокола от запаздывания. С помощью метода Цыпкина получена формула для граничного значения запаздывания, которое зависит от спектра лапласовской матрицы. С помощью аппаратов алгебраической теории графов, теории управления и операционного исчисления также получена формула для асимптотического поведения устойчивой многоагентной системы для разных начальных условий и, как следствие, получено условие достижения консенсуса для любого вектора начальных значений. Также показано, что если орграф влияний является сбалансированным, то протокол с запаздыванием сходится к усредненному консенсусу.

Ключевые слова: многоагентная система, протокол консенсуса с запаздыванием, лапласовская матрица, метод Цыпкина, собственный проектор.

ВВЕДЕНИЕ

Системы с запаздыванием, в частности многоагентные системы (МАС), представляют большой интерес для исследования и встречаются во многих областях. Причиной возникновения запаздывания в таких системах могут быть как физические, так и биологические ограничения. В моделях транспортного потока запаздывание возникает из-за человеческого фактора: времени, необходимого водителю на обнаружение изменения ситуации во время движения, времени на реакцию и пр. [1–4]. Такие модели используются в задачах автоматизации транспортных средств для достижения безопасности дорожного движения и эффективного использования автомагистралей (см., например, работу [5]).

Запаздывания возникают и в моделях, описывающих динамику цен на рынке товаров [6]. На

цену товара влияют спрос и предложение в данный момент времени, на которые среди прочего влияют информация о прошлых ценах и задержки производства товара соответственно. Фактор задержки при производстве влияет на устойчивость рыночных моделей и может привести к неустойчивости, в то время как задержки при получении информации о ценах на взаимосвязанных рынках могут иметь стабилизирующий эффект [7]. Запаздывание в процессе производства товаров возникает из-за времени, которое нужно для транспортировки материалов, настройки оборудования и самого производства [8].

В моделях, описывающих биологические процессы, также возникает запаздывание [9–11]. При моделировании роста числа клеток необходимо учитывать время, которое необходимо на деление клетки [12]. Схожий принцип используется в эпидемиологических моделях (см., например, работу

[13]). Моделирование роста численности популяции должно учитывать, что новая особь не может дать потомство, пока не созреет и не станет репродуктивной [14]. В модели Вольтерра роста численности популяции учитывается тот факт, что с увеличением плотности популяции уменьшается скорость ее роста. В связи с этим на скорость роста популяции влияет численность популяции в прошлом, что, например, учитывается в модели «хищник – жертва» [15]. В генетических сетях запаздывание возникает в силу времени протекания реакции. В фиксированный момент времени могут протекать реакции, которые не влияют на текущее состояние системы, но будут влиять на ее состояние через некоторое время [16]. При описании модели дыхательного процесса необходимо учесть, что циркуляция углекислого газа в крови происходит с задержкой [17].

Большинство моделей с запаздыванием основаны на взаимодействии скорости изменения различных величин с их значениями в предыдущие моменты времени, зависящие от запаздывания. Непрерывные динамические модели описываются дифференциальными, функционально-дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом и системами с запаздыванием, устойчивость которых представляет большой интерес. Начиная со второй половины XX в. в данной области появляется множество классических результатов (см., например, работы [18–21]). Устойчивость таких систем тесно связана с устойчивостью квазиполиномов, чему также посвящено большое количество работ (см., например, [22–25]).

Многоагентные системы с информационными воздействиями занимают центральное место среди всех МАС. Агенты получают данные от своих соседей, и происходит процесс изменения данных. Тем самым агенты согласовывают свои характеристики [26–29]. Для таких систем актуальна задача нахождения условий достижения агентами консенсуса вне зависимости от их начального состояния. Не менее важной является задача нахождения вектора характеристик, к которому сойдутся характеристики агентов. В частности, данная задача сводится к нахождению значения консенсуса.

В данной статье рассматривается протокол согласования характеристик в МАС с информационными влияниями и дополнительными связями. Агенты получают от одних агентов информацию без запаздывания, а от остальных – с некоторым запаздыванием. При применении непрерывного

протокола строятся лапласовские матрицы, которые используются в системе дифференциальных уравнений с запаздыванием. В § 1 приводятся необходимые понятия по МАС и полученные ранее вспомогательные результаты. В § 2 рассматривается задача нахождения области устойчивости протокола МАС. Асимптотическому поведению протокола МАС посвящен § 3. В частности, решается задача сходимости протокола к консенсусу при любом векторе начальных значений.

1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Многоагентные системы с информационными воздействиями и с множеством агентов $V = \{1, \dots, n\}$ удобно представить в виде взвешенного орграфа $\Gamma = \langle V, E \rangle$. В нем $E \subset V \times V$ является множеством дуг. Если агент j влияет на агента i с весом a_{ij} , то существует дуга из вершины j в вершину i с тем же весом. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей коммуникаций.

Исходящий лес в орграфе Γ – подграф в Γ , в котором нет циклов, а в каждую вершину входит не более одной дуги. Вершина j является корнем исходящего леса, если нет входящих в нее дуг. Множество $\mathcal{F}_k(\Gamma)$ – множество всевозможных исходящих лесов в орграфе Γ , содержащих k дуг. Множество $\mathcal{F}_k^{j \rightarrow i}(\Gamma)$ – множество всевозможных исходящих лесов в орграфе Γ , в которых j является корнем, а вершина i достижима из вершины j .

Определение 1. Весом исходящего леса является произведение весов всех его дуг. Вес множества $\mathcal{F}_k(\Gamma)$ – сумма весов всевозможных исходящих лесов в орграфе Γ , содержащих k дуг, он обозначается $\epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma))$.

Определение 2. Базовой бикомпонентой орграфа Γ называется такой подграф K , в котором все вершины взаимно достижимы и нет дуг из $\Gamma \setminus K$ в K .

Определение 3. Лапласовская матрица L , соответствующая орграфу Γ , определяется как

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i; \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}, & j = i. \end{cases} \blacklozenge$$



Также будем говорить, что лапласовской матрице $L \in \mathbb{R}_{n \times n}$ соответствует орграф Γ , если орграф построен на множестве вершин $\{1, \dots, n\}$, а всякая дуга (j, i) с весом $|l_{ij}|$ принадлежит множеству дуг тогда и только тогда, когда $l_{ij} < 0$.

Исходя из определения, очевидно, что $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ – векторы-столбцы размерности n , состоящие из единиц и нулей соответственно. Таким образом, 0 всегда будет собственным значением лапласовской матрицы. Спектр матрицы L – набор собственных значений – обозначим через $\sigma(L) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и будем рассматривать с учетом кратности. Обозначим через $\sigma'(L) \subset \sigma(L)$ спектр матрицы L без одного нулевого значения.

Определение 4. Индексом ν квадратной матрицы A является размер наибольшей клетки жордановой формы с нулевой диагональю или минимальное число ν , при котором $\text{rank}(A^\nu) = \text{rank}(A^{\nu+1})$.

Утверждение 1. [29] Индекс лапласовской матрицы L равен единице.

Определение 5. [30] Собственным проектором квадратной матрицы A , соответствующим нулевому собственному значению, называется такая идемпотентная матрица A^+ , что $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{R}(A^\nu) = \mathcal{N}(A^+)$, где ν – индекс матрицы A ; $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\mathcal{N}(\cdot)$ – образ и ядро соответствующей матрицы. ♦

Обозначим через I единичную матрицу размерности $n \times n$.

Теорема 1. [31] Пусть лапласовской матрице L соответствует орграф Γ . Тогда:

1. Матрица L^+ является стохастической и идемпотентной.

2. $(I + pL)^{-1} = \frac{1}{r_\Gamma(p)} (Q_0(\Gamma) + pQ_1(\Gamma) + \dots + p^{n-l}Q_{n-l}(\Gamma))$, где $p > 0$; $r_\Gamma(p) = \sum_{k=0}^{n-l} p^k \epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma))$;

$Q_k = (q_{ij}^{(k)})$; $q_{ij}^{(k)} = \epsilon(\mathcal{F}_k^{j \rightarrow i}(\Gamma))$; l – количество базовых бикомпонент в орграфе Γ .

3. $\lim_{p \rightarrow \infty} (I + pL)^{-1} = \frac{1}{\epsilon(\mathcal{F}_{n-l}(\Gamma))} Q_{n-l}(\Gamma) = L^+$.

В данной статье будет рассмотрен протокол консенсуса первого порядка в многоагентной системе в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), t > 0; \\ u(t) = -L_1 x(t) - \gamma L_2 x(t - \tau); \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

где L_1 и L_2 – нормированные лапласовские матрицы, т. е. $-\frac{1}{n} \leq l_{ij} \leq 0$, а матрица $K = L_1 + L_2$ – нормированная матрица полного графа с одинаковым весом всех дуг, $\gamma \in (0, 1]$.

Определение 6. Будем говорить, что протокол (1) устойчив, если решение $x(t)$ соответствующей системы имеет конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Определение 7. Будем говорить, что протокол (1) сходится к консенсусу (или *достигает асимптотического консенсуса*), если предел решения $x(t)$ соответствующей системы можно представить в виде $c\mathbf{1}$, где c – константа, зависящая от начальной функции $\phi(\theta)$. ♦

Протокол (1) является частным случаем системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau). \quad (2)$$

Система (2) встречается во многих моделях в различных предметных областях. В модели транскрипции и трансляции генов матрица A_0 является матрицей вероятности перехода из одного узла решетки в другой. При этом различные химические реакции влияют на процесс перехода с запаздыванием, что отображено матрицей A_1 . В силу того, что химические реакции протекают за разное время, система (2) может включать в себя несколько элементов с различным запаздыванием [16]. В модели численности клеток крови матрица элемента без запаздывания отвечает за скорость потери клеток крови во время циркуляции. Элемент с запаздыванием отвечает за поток крови из предыдущих отсеков [11]. Схожий принцип используется в нейронной сети Хопфилда, в которой компоненты вектора $x(t)$ – это значения напряжения на входе соответствующих нейронов. Скорость изменения напряжения зависит от сопротивления нейрона и передачи электрического сигнала между нейронами, которая проходит с некоторым запаз-

дыванием в силу ограниченной скорости [32]. Такие модели в общем виде включают в себя функцию передачи F :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 F(x(t-\tau)).$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Характеристической функцией системы (1) будет

$$F(z) = \det(zI + L_1 + \gamma L_2 e^{-\tau z}).$$

Утверждение 2.

$$F(z) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + \gamma e^{-\tau z} (1 - \lambda)).$$

Доказательство. Матрицу K можно представить в виде $K = I - \frac{1}{n}E$, где E – матрица, состоящая из единиц. Пусть Жорданова форма Λ_K имеет вид $\Lambda_K = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ и S – матрица, преобразующая K в Λ_K :

$$S^{-1}KS = \Lambda_K.$$

В силу того, что $\mathbf{1}$ – правый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, то пусть $\mathbf{1}$ – первый столбец матрицы S . Из этого следует, что

$$S^{-1}L_1S = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix},$$

где L_1^S – некоторая матрица; $\sigma(L_1^S) = \sigma'(L_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \det(S^{-1}(zI + L_1 + \gamma e^{-\tau z}L_2)S) = \\ &= \det(zI + S^{-1}L_1S + \gamma e^{-\tau z}S^{-1}(K - L_1)S) = \\ &= \det(zI + \gamma e^{-\tau z}S^{-1}KS + (1 - \gamma e^{-\tau z})S^{-1}L_1S) = \\ &= \det\left(zI + \gamma e^{-\tau z}\Lambda_K + (1 - \gamma e^{-\tau z})\begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} z & & & \\ & z + \gamma e^{-\tau z} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z + \gamma e^{-\tau z} \end{pmatrix} + (1 - \gamma e^{-\tau z})\begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Обозначим через I_{n-1} единичную матрицу размерности $(n-1) \times (n-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= z \det\left(\begin{pmatrix} z + \gamma e^{-\tau z} & & \\ & I_{n-1} + (1 - \gamma e^{-\tau z})L_1^S & \\ & & \lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \gamma e^{-\tau z} + (1 - \gamma e^{-\tau z})\lambda) = \\ &= z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + \gamma e^{-\tau z} (1 - \lambda)). \spadesuit \end{aligned}$$

Замечание 1. Если $\gamma = 1$, то $F(z)$ будет иметь вид $F(z) = \det(zI + L_1 + e^{-\tau z}L_2) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + e^{-\tau z} (1 - \lambda))$. Это можно интерпретировать следующим образом: если $\lambda \in \sigma'(L_1)$, то $(1 - \lambda) \in \sigma'(L_2)$, что дополняет результат, полученный в работе [33]. \spadesuit

Отметим, что первое нулевое собственное значение матрицы L_1 не влияет на устойчивость протокола (1), при этом характеристическая функция протокола (1) состоит из произведения характеристических функций скалярных уравнений:

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) - \gamma(1 - \lambda)y(t - \tau). \quad (3)$$

Если решение (3) устойчиво для всех $\lambda \in \sigma'(L_1)$, то протокол (1) устойчив.

Если $\lambda = 0$, то уравнение (3) станет скалярным уравнением с запаздыванием вида

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t - \tau). \quad (4)$$

Граничное значение запаздывания для уравнения (4) можно получить, например, как следствие из результата, полученного в работе [34].

Утверждение 3. Решение уравнения (4) устойчиво, если $\tau < \frac{\pi}{2\gamma}$.

Для остальных случаев характеристическую функцию уравнения (3) представим в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \lambda + \gamma(1 - \lambda)e^{-\tau z} = \\ &= Q(z) - P(z)e^{-\tau z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для исследования устойчивости квазиполинома (5) воспользуемся методом Цыпкина, который основан на критерии Найквиста. Примем квазиполином $Q(z) - P(z)e^{-\tau z}$ за характеристическую функцию эквивалентной системы с запаздывающей об-



ратной связью. Устойчивость оценим с помощью амплитудно-фазовой характеристики соответствующей разомкнутой системы, которая будет иметь вид:

$$W_\tau(is) = \frac{P(is)}{Q(is)} e^{-i\tau s} = -\frac{\gamma(1-\lambda)}{is+\lambda} e^{-i\tau s}.$$

Характеристической функцией разомкнутой системы будет функция $Q(z) = z + \lambda$. В силу того, что λ имеет положительную действительную часть, разомкнутая система будет устойчивой. Амплитудно-фазовая характеристика системы с запаздывающей обратной связью будет иметь вид $\frac{W_\tau}{1-W_\tau}$. Тогда, согласно критерию Найквиста, если точка $(1, i0)$ лежит вне годографа $W_\tau(is)$, то решение уравнения (3) будет устойчивым.

Пусть $\alpha = \text{Re}(\lambda)$, $\beta = \text{Im}(\lambda)$ и

$$W_\tau(is) = W_0(is) e^{-i\tau s}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_0(is) &= -\frac{\gamma(1-\alpha) - i\gamma\beta}{is + \alpha + i\beta} = \\ &= -\gamma \frac{(1-\alpha)\alpha - \beta(s+\beta)}{\alpha^2 + (\beta+s)^2} - \\ &-i\gamma \frac{-\alpha\beta - (1-\alpha)(s+\beta)}{\alpha^2 + (\beta+s)^2} = u + iv. \end{aligned} \quad (6)$$

Утверждение 4. Пусть $\gamma=1$. Тогда преобразование $W_0(z)$ отображает мнимую ось в окружность:

$$\left(u - \frac{\alpha-1}{2\alpha}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = R^2,$$

где $R = \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2}}{2\alpha}$.

Доказательство. Обозначим $z = x + iy$, $w = W_0(z)$. Очевидно, что $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, где \bar{z} – число, комплексно-сопряженное к z . В силу того, что $w = -\frac{1-\lambda}{z+\lambda}$, можно выразить z как

$$z = \frac{\lambda-1}{w} - \lambda = \frac{(\lambda-1)\bar{w}}{|w|^2} - \lambda.$$

Тогда

$$\bar{z} = \frac{(\bar{\lambda}-1)w}{|w|^2} - \bar{\lambda}.$$

Так как $z = iy$, то $x = \frac{z + \bar{z}}{2} = 0$, что можно записать

в виде:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda-1)\bar{w}}{|w|^2} - \lambda + \frac{(\bar{\lambda}-1)w}{|w|^2} - \bar{\lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha-1+i\beta)(u-iv)}{u^2+v^2} - \alpha - i\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha-1-i\beta)(u+iv)}{u^2+v^2} - \alpha + i\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-2\alpha + \frac{2(\alpha-1)u + 2\beta v}{u^2+v^2} \right) = \\ &= -\alpha + \frac{(\alpha-1)u + \beta v}{u^2+v^2} \Rightarrow \alpha = \frac{(\alpha-1)u + \beta v}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{\alpha-1}{\alpha}u + \frac{\beta}{\alpha}v \Rightarrow u^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha}u + \\ &+ \frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha^2} + v^2 - \frac{\beta}{\alpha}v + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\left(u - \frac{\alpha-1}{2\alpha}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{(\alpha-1)^2 + \beta^2}{4\alpha^2}. \quad \blacklozenge$$

Далее понадобится следующее очевидное выражение

$$|W_\tau(is)| = |W_0(is)| = \sqrt{\frac{\gamma^2((1-\alpha)^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + (s+\beta)^2}}.$$

Утверждение 5.

1. Если $\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 < \alpha^2$ для всех $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma'(L_1)$, то устойчивость протокола (1) не зависит от запаздывания.

2. Пусть матрице $L_1 = (l_{ij}^1)$ соответствует неориентированный граф G_1 (см. определение 3), а матрице $L_2 = (l_{ij}^2)$ – неориентированный граф G_2 , $\gamma=1$, $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$. Тогда устойчивость протокола (1) не будет зависеть от запаздывания.

Доказательство.

1. Доказательство этого пункта непосредственно следует из вышеприведенного выражения для $|W_0(is)|$.

2. В силу того, что G_1 и G_2 неориентированные графы, матрицы L_1 и L_2 имеют действительные спектры. Тогда, согласно теореме Гершгорина,

$$\max_{\lambda_i \in \sigma(L_2)} \lambda_i \leq 2 \max_i l_{ii}^2.$$

В силу того, что $L_1 + L_2 = K$, максимальный элемент матрицы L_2 можно выразить с помощью минимального элемента L_2 как

$$\max_i l_{ii}^2 = \frac{n-1}{n} - \min_i l_{ii}^1 = 1 - \min_i l_{ii}^1 - \frac{1}{n}.$$

Тогда второе минимальное собственное значение лапласовской матрицы для графа G_1 , т. е. минимальное значение из спектра $\sigma'(L_1)$, можно оценить как

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_i \in \sigma'(L_1)} \lambda_i &= 1 - \max_{\lambda_i \in \sigma(L_2)} \lambda_i \geq 1 - 2 \max_i l_{ii}^2 = \\ &= 1 - 2 \left(1 - \min_i l_{ii}^1 - \frac{1}{n} \right) = 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\min_{\lambda_i \in \sigma'(L_1)} \lambda_i \geq 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n}.$$

Согласно условию $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$,

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i &\geq 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n} > 2 \frac{3n-4}{4n} - 1 + \frac{2}{n} = \\ &= \frac{6n-8-4n+8}{4n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$, то $\lambda > \frac{1}{2}$, что, согласно утверждению 5, означает, что устойчивость протокола (1) не будет зависеть от запаздывания. ♦

Теорема 2. Пусть множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \sigma'(L_1) \mid \gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 \geq \alpha^2 \right\}$$

не пусто. Для всех действительных $\lambda \in \Lambda$ вычислим значения

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\lambda}{\gamma(1-\lambda)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}},$$

а для пар комплексно-сопряженных $\lambda = \alpha \pm i\beta$ значения

$$\begin{aligned} \tau_\lambda^{1,2} &= \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2 \mp \beta}}; \\ \tau_\lambda &= \min\{\tau_\lambda^1, \tau_\lambda^2\}. \end{aligned}$$

Тогда протокол (1) устойчив при любом $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$.

Доказательство. Найдем критические частоты для скалярного уравнения (3) при фиксированном λ . Из $|W_\tau(is)| = 1$ получаем

$$s + \beta = \pm \sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}.$$

Тогда точка $(1, 0)$ лежит на годографе $W_\tau(is)$, если

$$\arg(W_0(is)) - \tau s = 2\pi n,$$

$$\cos(\arg(W_0(is))) = \cos(\tau s).$$

Стоит отметить, что $\cos(\arg(W_0(is))) = u$. Тогда

$$\tau = \frac{\arccos(u)}{s}.$$

Подставим критическое значение s в формулу (6) и получим:

$$u = -\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}.$$

Так как функция $\arccos(u)$ – положительная, то для нахождения граничного значения запаздывания нужны только положительные критические частоты s .

Рассмотрим случай, когда $\lambda \in R$, т. е. $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$.

Критическими частотами будут $s = \pm \sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}$. Тогда рассмотрим только положительную критическую частоту, и граничным значением запаздывания будет

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\lambda}{\gamma(1-\lambda)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}}. \quad (7)$$

Если подставить $\lambda = 0$ в формулу (7), то получится граничное значение запаздывания из утверждения 3. Таким образом, формула (7) обобщает результат из утверждения 3.



Если λ – комплексное число и $\beta > 0$, то при $|\lambda|^2 > |\gamma(1-\lambda)|^2$ обе критические частоты будут отрицательными, а это означает, что устойчивость решения уравнения (3) не будет зависеть от запаздывания. В связи с этим для удобства представления результата возьмем пару комплексно-сопряженных чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Тогда двум критическим частотам соответствуют следующие значения запаздывания:

$$\tau_\lambda^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2} \mp \beta};$$

$$\tau_\lambda^{3,4} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{-\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2} \mp \beta}.$$

Стоит отметить, что $\tau_\lambda^3 < 0$, и $\tau_\lambda^1 = -\tau_\lambda^4$. Тогда для пары комплексно-сопряженных чисел λ граничным значением запаздывания будет $\tau_\lambda = \min\{|\tau_\lambda^1|, \tau_\lambda^2\}$ и решения всех рассматриваемых скалярных уравнений (3) будут устойчивы для любых $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$, а значит протокол (1) будет устойчивым. ♦

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ СОГЛАСОВАННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для исследования асимптотического поведения протокола (1) необходимы следующие вспомогательные утверждения, где в силу расширенной теоремы о конечном значении [35] предполагается, что $s \in \mathbb{R}^+$.

Утверждение 6. Пусть $s \in \mathbb{R}^+$. Тогда для произвольных лапласовских матриц L_1 и L_2 справедливо

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + L_2) \right)^{-1} = (L_1 + L_2)^{\dagger}.$$

Доказательство. Пусть матрице $L_1 + e^{-\tau s} L_2$ соответствует орграф Γ_1 , а матрице $L_1 + L_2$ – орграф Γ_2 . Обозначим $L_1 = (l_{ij}^1)$, $L_2 = (l_{ij}^2)$. Тогда в орграфе Γ_1

дуга из вершины j в вершину i будет иметь вес $|l_{ij}^1 + e^{-\tau s} l_{ij}^2|$, а эта же дуга в орграфе Γ_2 будет иметь вес $|l_{ij}^1 + l_{ij}^2|$. Если лес F в орграфе Γ_2 имеет вес $\prod_{k, i_k \neq j_k} |l_{i_k j_k}^1 + l_{i_k j_k}^2|$, то аналогичный лес в орграфе Γ_1 будет иметь вес $\prod_{k, i_k \neq j_k} |l_{i_k j_k}^1 + e^{-\tau s} l_{i_k j_k}^2|$.

В силу теоремы 1

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{r_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{s} \right)} \left(Q_0(\Gamma_1) + \frac{1}{s} Q_1(\Gamma_1) + \dots + \frac{1}{s^{n-1}} Q_{n-1}(\Gamma_1) \right),$$

где l – количество базовых компонент в орграфе Γ_1 . Стоит отметить, что в графе Γ_2 содержится такое же количество бикомпонент, а также $\epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma_1)) \rightarrow \epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma_2))$ при $s \rightarrow 0$. Тогда, умножив числитель и знаменатель на s^{n-1} , получим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} = \frac{1}{\epsilon(\mathcal{F}_{n-1}(\Gamma_2))} Q_{n-1}(\Gamma_2).$$

С другой стороны, по теореме 1

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + L_2) \right)^{-1} = \frac{1}{\epsilon(\mathcal{F}_{n-1}(\Gamma_2))} Q_{n-1}(\Gamma_2) = (L_1 + L_2)^{\dagger}.$$

Тогда $\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + L_2) \right)^{-1} = (L_1 + L_2)^{\dagger}$. ♦

Утверждение 7. Если L_1 и L_2 – нормированные лапласовские матрицы и $L_1 + L_2 = K$, то

$$(L_1 + \gamma L_2)^{\dagger} = \frac{1}{n} E \left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1}.$$

Доказательство. В случае $\gamma \in (0, 1)$ представим матрицу $(L_1 + \gamma L_2)$ в виде

$$(L_1 + \gamma L_2) = (L_1 + \gamma K - \gamma L_1) = ((1-\gamma)L_1 + \gamma K) = (1-\gamma) \left(L_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} K \right).$$

В силу леммы 8 из работы [36] имеет место

$$\begin{aligned} (L_1 + \gamma L_2)^+ &= \left((1-\gamma) \left(L_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} K \right) \right)^+ = \\ &= \frac{1}{n} E \left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\gamma = 1$, то $L_1 + \gamma L_2 = K$, и $K^+ = \frac{1}{n} E$, что является частным случаем формулы (8) при $\gamma = 1$. ♦

Утверждение 6 также можно доказать с помощью теоремы о конечном значении и метода Фаддеева.

Замечание 2. Стоит отметить, что $\lim_{\gamma \rightarrow 0} (L_1 + \gamma L_2)^+ = \frac{1}{n} E L_1^+$. Если 0 – простое собственное значение матрицы L_1 , то $\frac{1}{n} E L_1^+ = L_1^+$. Однако в общем случае $\frac{1}{n} E L_1^+ \neq L_1^+$, так как $\frac{1}{n} E L_1^+$ является матрицей единичного ранга. На основе этого строится протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями, который позволяет агентам в МАС со слабосвязной структурой достичь консенсуса при любом векторе начальных значений (более подробно см. работу [36]).

Теорема 3. Пусть протокол (1) устойчив, и $x(t)$ – решение системы (1). Тогда:

1. Если $\phi(\theta) = x_0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} (I - \gamma \tau L_2) x_0.$$

2. Если

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0); \\ x_0, & \theta = 0, \end{cases} \quad (9)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} x(0).$$

Доказательство.

1. Пусть $\phi(\theta) = x_0$. Рассмотрим преобразование Лапласа функции $x(t-\tau)$:

$$\mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = \int_0^\infty e^{-ts} x(t-\tau) dt.$$

Пусть $u = t - \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ts} x(t-\tau) dt &= \int_{-\tau}^\infty e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \\ &= \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x(u) du + \int_0^\infty e^{-(u+\tau)s} x(u) du. \end{aligned}$$

В силу того, что $x(\theta) = \phi(\theta) = x_0$ при $\theta \in [-\tau, 0]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t-\tau)\} &= \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x_0 du + e^{-\tau s} \int_0^\infty e^{-us} x(u) du = \\ &= \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s), \end{aligned}$$

где $X(s)$ – преобразование Лапласа для $x(t)$. Тогда в силу того, что $x(0) = x_0$, преобразованием Лапласа системы (1) будет

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= -L_1 X(s) - \gamma e^{-\tau s} L_2 X(s) - \gamma \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 x_0; \\ X(s) &= (sI + L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2)^{-1} \left(I - \gamma \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0. \end{aligned}$$

Согласно расширенной теореме о конечном значении [35], допускающей $s \in \mathbb{R}^+$, для данного случая имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s (sI + L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2)^{-1} \left(I - \gamma \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} \left(I - \gamma \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} = \tau$. В силу утверждения 6, $\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (L_1 + \gamma L_2 e^{-\tau s}) \right)^{-1} = (L_1 + \gamma L_2)^+$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (L_1 + \gamma L_2)^+ (I - \gamma \tau L_2) x_0.$$

С другой стороны, согласно утверждению 7,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} (I - \gamma \tau L_2) x_0.$$

2. Для случая, когда начальная функция имеет форму (9), доказательство проводится аналогично, учитывая то, что $\mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = e^{-\tau s} X(s)$. ♦



Замечание 3. При больших значениях запаздывания матрица $(I - \gamma\tau L_2)$ может содержать отрицательные элементы. Тогда матрица $(I - \gamma\tau L_2)$ не будет стохастической, что может привести к отрицательным элементам в векторе $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ при $\phi(\theta) = x_0$. Для предотвращения данной ситуации следует наложить ограничение $\gamma\tau < \frac{1}{\max_i l_{ii}^2}$, где

$$L_2 = (l_{ii}^2).$$

Следствие 2 из теоремы 3. Пусть условия теоремы 3 выполнены, $\gamma = 1$, $x(t)$ – решение системы (1) и $\phi(\theta) = x_0$. Если L_2 – матрица сбалансированного графа, то $x(t)$ будет сходиться к усредненному консенсусу при любом τ .

Доказательство. Справедливость следствия следует из того, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E(I - \tau L_2) x_0$ и что $EL_2 = \mathbf{0}_{n \times n}$, где $\mathbf{0}_{n \times n}$ – матрица из нулей размерности $n \times n$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E x_0$, т.е. $x(t)$ сходится к усредненному консенсусу при любом τ . ♦

Пример. Пусть многоагентная система представлена орграфом, изображенным на рис. 1, в котором все дуги имеют одинаковый вес.

Тогда матрицы L_1 и L_2 имеют вид:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix};$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & -0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\gamma = 1$ и начальная функция $\phi(\theta) = x_0$, где $x_0 = (2, 4, 6, 8)^T$. Спектром матрицы L_1 будет $\sigma(L_1) = (0; 0,25; 0,3455; 0,9045)$. Тогда $\sigma'(L_1) = (0,25; 0,3455; 0,9045)$, а множество $\Lambda = \{0,25; 0,3455\}$. Согласно теореме 2, граничным значением запаздывания протокола (1) будет $\tau_0 = \min\{2,702; 3,826\} = 2,702$. На рис. 2 представлено поведение характеристик агентов при различных значениях запаздывания. При $\tau = 0,9\tau_0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 5,608(1, 1, 1, 1)^T$, $x(120) \approx 5,608(1, 1, 1, 1)^T$.

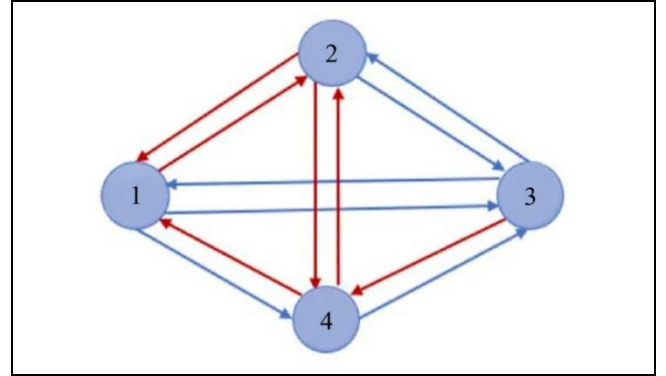


Рис. 1. Орграф многоагентной системы. Синие дуги соответствуют влиянию агента без запаздывания, красные дуги – с запаздыванием

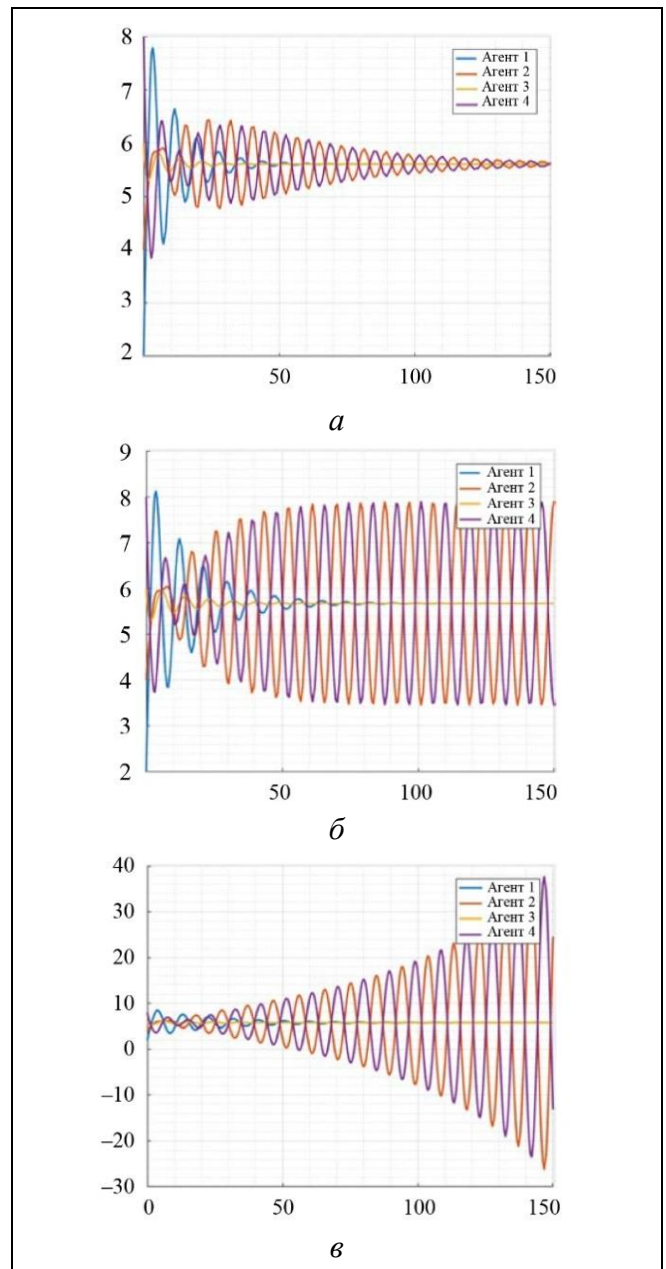


Рис. 2. Динамика характеристик агентов: а – при $\tau = 0,9\tau_0 = 2,432$; б – при $\tau = \tau_0 = 2,702$; в – при $\tau = 1,1\tau_0 = 2,972$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен протокол согласования характеристик в многоагентной системе с запаздыванием, в которой агенты получают информацию от части агентов без запаздывания, а от остальных – с общим запаздыванием. Для такого протокола получено условие независимости устойчивости от запаздывания. Также получено граничное значение запаздывания, которое зависит от спектральных свойств лапласовской матрицы. Для случая устойчивости протокола получено выражение для асимптотического поведения многоагентной системы при разных начальных условиях и, как следствие, условие достижения консенсуса для некоторых начальных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bose, A., Ioannou, P.A. Analysis of Traffic Flow with Mixed Manual and Semiautomated Vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2003. – Vol. 4, no. 4. – P. 173–188.
2. Helbing, D. Traffic and Related Self-driven Many-Particle Systems // Reviews of Modern Physics. – 2001. – Vol. 73. – P. 1067–1141.
3. Bando, M., Hasebe, K., Nakanishi, K., Nakayama, A. Analysis of Optimal Velocity Model with Explicit Delay // Physical Review E. – 1998. – Vol. 58, no. 5. – P. 5429–5435.
4. Gartner, N.H., Messer, C.J., Rathi, A. Traffic Flow Theory: A State-of-the-Art-Report. – Washington: US Department of Transportation, 2002. – 386 p.
5. Yang, H.H., Peng, H. Development of an Errorable Car-Following Driver Model // Vehicle System Dynamics. – 2010. – Vol. 48, no. 6. – P. 751–773.
6. Belair, J., Mackey, M.C. Consumer Memory and Price Fluctuations in Commodity Markets: An Integro-differential Model // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1989. – Vol. 1. – P. 299–325.
7. Matsumoto, A., Szidarovszky, F. Asymptotic Dynamics in a Multi-market Delayed Cobweb Model // Computational Economics. – 2025. – Vol. 65, no. 2. – P. 877–912.
8. Riddals, C.E., Bennett, S. The Stability of Supply Chains // International Journal of Production Research. – 2002. – Vol. 40, no. 2. – P. 459–475.
9. Baker, C.T., Bocharov, G.A., Rihan, F.A. A Report of the Use of Delay Differential Equations in Numerical Modelling in the Biosciences. – Manchester, UK: Manchester Centre for Computational Mathematics, 1999. – 46 p.
10. MacDonald, N. Biological Delay Systems: Linear Stability Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 235 p.
11. Foley, C., Mackey, M.C. Dynamic Hematological Disease: A Review // Journal of Mathematical Biology. – 2009. – Vol. 58. – P. 285–322.
12. Baker, C.T., Bocharov, G.A., Paul, C.A., Rihan, F.A. Modelling and Analysis of Time-Lags in Some Basic Patterns of Cell Proliferation // Journal of Mathematical Biology. – 1998. – Vol. 37. – P. 341–371.
13. Babasola, O., Kayode, O., Peter, O.J., et al. Time-Delayed Modelling of the COVID-19 Dynamics with a Convex Incidence Rate // Informatics in Medicine Unlocked. – 2022. – Vol. 35. – Art. no. 101124.
14. Gopalsamy, K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. – Dordrecht: Springer, 1992. – 502 p.
15. Cushing, J.M. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. – Heidelberg: Springer, 2013. – 198 p.
16. Ugander, J. Delay-Dependent Stability of Genetic Regulatory Networks: Master's Thesis. – Lund: Department of Automatic Control, Lund University, 2008. – 52 p.
17. Vielle, B., Chauvet, G. Delay Equation Analysis of Human Respiratory Stability // Mathematical Biosciences. – 1998. – Vol. 152, no. 2. – P. 105–122.
18. Дыткин Я.З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. – 1946. – Т. 7, № 2-3. – С. 107–129. [Tsytkin, Y.Z. Ustoichivost' sistem s zapazdyvayushchei obratnoi svyaz'yu // Avtomatika i Telemekhanika – 1946. – Vol. 7, no. 2-3. – P. 107–129. (In Russian)]
19. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 295 с. [El'sgol'ts, L.E. and Norkin, S.B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. Translated by McLaughlin, R.J. – San Francisco–Cambridge–London: Holden-Day, 1973.]
20. Gu, K., Chen, J., Kharitonov, V.L. Stability of Time-Delay Systems. – Berlin: Birkhäuser, 2003. – 388 p.
21. Tsytkin, Y.Z., Mingue, F. Robust Stability of Time-Delay Systems with an Uncertain Time-Delay Constant // International Journal of Control. – 1993. – Vol. 57, no. 4. – P. 865–879.
22. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1942. – Т. 6, № 3. – С. 115–134. [Pontryagin, L.S. On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions, in American Mathematical Society Translations. – 1955. – Ser. 2, vol. 1. – P. 95–110. (First published in American Mathematical Society Translations, 1951, no. 49.)]
23. Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. – 1949. – Т. 26. – С. 3–331. [Chebotarev, N.G., Meiman, N.N. The Routh-Hurwitz Problem for Polynomials and Entire Functions // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova. – 1949. – Vol. 26. – P. 3–331. (In Russian)]
24. Niculescu, S.I., Li, X.G., Cela, A. Counting Characteristic Roots of Linear Delay Differential Equations. Part I // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 117–155.
25. Niculescu, S.I., Boussaada, I. Counting Characteristic Roots of Linear Delay Differential Equations. Part II // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 157–193.
26. Olfati-Saber, R., Murray, R.M. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, no. 9. – P. 1520–1533.
27. Seuret, A., Dimarogonas, D.V., Johansson, K.H. Consensus under Communication Delays // 2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. – Cancun, Mexico, 2008. – P. 4922–4927.



28. Ren, W., Beard, R.W. Consensus Seeking in Multiagent Systems under Dynamically Changing Interaction Topologies // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2005. – Vol. 50, no. 5. – P. 655–661.
29. Chebotarev, P., Agaev, R. Forest Matrices around the Laplacian Matrix // Linear Algebra and Its Application. – 2002. – Vol. 356, no. 1–3. – P. 253–274.
30. Rothblum, G. Computation of the Eigenprojection of a Nonnegative Matrix at Its Spectral Radius // Mathematical Programming Study. – 1976. – Vol. 6. – P. 188–201.
31. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и Телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43. [Agaev, R.P., Chebotarev, P.Y. Spanning Forests of a Digraph and Their Applications // Automation and Remote Control. – 2001. – Vol. 62, no. 3. – P. 443–466.]
32. Niculescu, S.I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. – London: Springer, 2002. – 383 p.
33. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Лапласовские спектры орграфов и их приложения // Автоматика и Телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 47–62. [Agaev, R.P., Chebotarev, P.Y. Laplace Spectra of Orgraphs and Their Applications // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66, no. 5. – P. 719–733.]
34. Hara, T., Sugie, J. Stability Region for Systems of Differential-difference Equations // Funkcialaj Ekvacioj. – 1996. – Vol. 39, no. 1. – P. 69–86.
35. Chen, J., Lundberg, K.H., Davison, D.E., Bernstein, D.S. The Final Value Theorem Revisited – Infinite Limits and Irrational Functions // IEEE Control Systems Magazine. – 2007. – Vol. 27, no. 3. – P. 97–99.
36. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Модели латентного консенсуса // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 1. – С. 106–120. [Agaev, R.P., Chebotarev, P.Y. Models of Latent Consensus // Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, no. 1. – P. 88–99.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 20.10.2025,
после доработки 16.01.2025.
Принята к публикации 28.01.2025.

Агаев Рафиг Паша оглы – д-р. физ.-мат. наук,
✉ agaraf3@gmail.com,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2901-6546>

Хомутов Дмитрий Константинович – мл. науч. сотрудник,
✉ homutov_dk@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4898-8508>

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
г. Москва

© 2026 г. Агаев Р. П., Хомутов Д. К.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная.](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

ANALYSIS OF TIME-DELAY CONSENSUS PROTOCOLS WITH COMPLEMENTARY LINKS

R. P. Agaev* and D. K. Khomutov**

***Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ agaraf3@gmail.com, **✉ homutov_dk@mail.ru

Abstract. This paper introduces a new consensus protocol in a multi-agent system (MAS) with complementary links and a time delay. According to this protocol, agents in an MAS receive information from some agents immediately, and from the others with a delay. This protocol is a special case of a more general model, commonly applied to analyze traffic flows, forecast price dynamics in commodity markets, and describe biological and epidemiological processes. A stability condition is derived under which the protocol converges regardless of the delay. Tsypkin's method is used to obtain the boundary delay, which depends on the spectrum of the Laplacian matrix. The frameworks of algebraic graph theory, control theory, and operational calculus are employed to establish the asymptotic behavior of a stable MAS for different initial conditions and, consequently, a condition for reaching consensus for any initial value vector. As demonstrated, if the influence digraph is balanced, the time-delay consensus protocol will converge to an average consensus.

Keywords: multi-agent system (MAS), time-delay consensus protocol, Laplacian matrix, Tsypkin's method, eigenprojector.