



УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ ГРУППОЙ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ¹

Т.Г. Абрамянц, Е.П. Маслов, В.П. Яхно

Приведено решение задачи об оптимизации программного закона уклонения подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей. Вектор управления включает в себя траекторию уклонения и закон изменения скорости на траектории.

Ключевые слова: уклонение от обнаружения, группа наблюдателей, первый интеграл, алгоритм Дейкстры.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая в статье задача относится к классу задач об управлении, получивших в англоязычной литературе название «Optimal Transit Path Planning in Threat Environment» [1–6]. В отечественной литературе эти задачи известны как задачи управления подвижными объектами в конфликтной среде [7]. Под конфликтной средой понимается совокупность объектов (они называются конфликтующими), сближение с которыми для управляемого объекта нежелательно в ходе выполнения им основной задачи. Цель управления объектом при движении его в конфликтной среде состоит в минимизации негативного воздействия конфликтующих объектов на управляемый объект путем выбора маршрута его движения, параметров движения и (или) режимов работы технических средств. В зависимости от существа конкретной задачи целями негативного воздействия могут считаться обнаружение объекта, сближение с конфликтующим объектом до расстояний, с которых возможно его поражение и др.

Задачи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения рассматривались в целом ряде работ [1–12]. Больше всего результатов получено для случая уклонения на плоскости.

Задача уклонения подвижного объекта на плоскости от обнаружения группой действующих совместно (соединенных в сеть) N неподвижных наблюдателей (сенсоров), расположенных в точках с координатами (a_i, b_i) , формулируется как вариаци-

онная задача: управляемый объект перемещается в течение заданного времени T из фиксированной начальной точки $A(x_A, y_A)$ в фиксированную конечную точку $B(x_B, y_B)$ маршрута, минимизируя выбором траектории движения и закона изменения скорости функционал (риск)

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{\rho_i^n} dt, \quad (1)$$

где $\rho_i = \rho_i(t) = \sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2}$, $x(t)$, $y(t)$ — текущие декартовы координаты уклоняющегося объекта; $\dot{x} = \dot{x}(t)$; $\dot{y} = \dot{y}(t)$; — составляющие вектора текущей скорости объекта; m и n — постоянные числа; граничные условия имеют вид

$$x(0) = x_A, \quad y(0) = y_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(T) = y_B. \quad (2)$$

Особенность задач уклонения от обнаружения состоит в том, что во всех случаях текущий уровень сигнала на входе сенсора (системы сенсоров) зависит от текущей дистанции до уклоняющегося объекта. Значение показателя степени n служит характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение [2]. Содержательный смысл имеют значения $n = 1, 2, 3, 4$.

Значение $n = 1$ соответствует процессу затухания волн на поверхности жидкости и убыванию уровня интенсивности гидроакустического поля в мелком море. Значение $n = 2$ соответствует убыванию уровней интенсивностей теплового поля, первичного электромагнитного поля и гидроакустического поля в глубоком море при их распространении в пространстве (пассивный режим обнаружения). Значение $n = 3$ соответствует убыванию уровня напряженности магнитного поля.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и РФФИ (грант № 10-08-90030-Бел_а).

Значение $n = 4$ соответствует убыванию уровней интенсивностей вторичного электромагнитного и гидроакустического полей (активный режим обнаружения).

Значение показателя степени m характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Такая зависимость имеет место для сигналов первичного гидроакустического поля [3, 4].

Физическая интерпретация вариационной задачи (1), (2) состоит в следующем. Риск — это величина, пропорциональная интегральному уровню принятого системой сенсоров сигнала, излученного подвижным объектом и прошедшего через среду распространения за время движения объекта по маршруту. При такой интерпретации сенсоры являются конфликтующими объектами; их негативное воздействие сводится к обнаружению уклоняющегося объекта.

Исторически задача об оптимизации законов уклонения от обнаружения вначале решалась для случая движения уклоняющегося объекта на постоянной скорости, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{const}$. Аналитическое решение задачи получено лишь при уклонении от одиночного неподвижного сенсора. Для случая уклонения объекта от обнаружения системой сенсоров предложены вычислительные алгоритмы [1, 2, 5].

При движении объекта на постоянной скорости по оптимальной траектории уклонения скорость определяется видом траектории и заданным временем движения. При постоянной скорости движения текущий уровень сигнала на входе сенсора (системы сенсоров) зависит лишь от текущей дистанции до уклоняющегося объекта. Развитие постановки задачи состоит в построении такого закона управления подвижным объектом, при котором оптимизируется не только траектория уклонения, но и закон изменения скорости его движения по траектории. Постановка и решение такой задачи для случая уклонения от обнаружения одиночным сенсором приведены в работах [10, 11]. Установлено, что решение оптимизационной задачи (1), (2) обладает следующей важной для практики особенностью — движение объекта по оптимальной траектории уклонения с использованием оптимального закона изменения скорости порождает на входе сенсора сигнал, мгновенный уровень которого остается постоянным в течение всего времени движения. Оптимизация траектории уклонения с одновременной оптимизацией закона изменения скорости позволяет при одном и том же интегральном уровне принятого сенсором сигнала сформировать на входе сенсора сигнал, мгновенный уровень которого меньше максимального мгновенного уровня сигнала, соответствующего

движению по оптимальной траектории на постоянной скорости [10]. Такая особенность оптимального закона уклонения на переменной скорости делает его перспективным для применения как в смысле необнаружения объекта по интегральному критерию, так и в смысле необнаружения его по мгновенному уровню сигнала.

В настоящей статье показывается, что при наличии нескольких наблюдателей мгновенный уровень сигнала, принятого системой сенсоров, также остается постоянным при оптимальном законе управления уклоняющимся объектом. Этот факт используется при построении численного алгоритма оптимизации закона управления в задаче уклонения от обнаружения группой сенсоров.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматривается вариационная задача об уклонении на плоскости подвижного объекта от обнаружения системой из N сенсоров, расположенных в точках с координатами (a_i, b_i) . Управляемый объект перемещается в течение заданного времени T из фиксированной начальной точки $A(x_A, y_A)$ в фиксированную конечную точку $B(x_B, y_B)$ маршрута, минимизируя выбором траектории движения и закона изменения скорости функционал

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{[\sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2}]^n} dt \rightarrow \min_{x, y, \dot{x}, \dot{y}}, \quad (3)$$

что отражается записью (3); граничные условия задаются соотношениями (2).

Утверждение. На траектории, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности (уравнениям Эйлера) для задачи (2), (3), при любых фиксированных m и n имеет место равенство

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{[\sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2}]^n} = \text{const.} \quad \blacklozenge \quad (4)$$

Доказательство сводится к установлению справедливости следующих двух фактов относительно гамильтониана [13]

$$\Phi = F - \dot{x} F_{\dot{x}} - \dot{y} F_{\dot{y}}$$

для функционала (3):

- на решениях уравнений Эйлера $\frac{d\Phi}{dt} = 0$.
- справедливо равенство $\Phi = (1 - 2m)F$.



Уравнения Эйлера для функционала (3) имеют следующий вид:

$$F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = F_x - F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{x} - F_{\dot{x}\ddot{x}} \ddot{x} - F_{\dot{x}y} \dot{y} - F_{\dot{x}\dot{y}} \dot{y} = 0, \quad (5)$$

$$F_y - \frac{dF_{\dot{y}}}{dt} = F_y - F_{\dot{y}\dot{x}} \dot{x} - F_{\dot{y}\ddot{x}} \ddot{x} - F_{\dot{y}y} \dot{y} - F_{\dot{y}\dot{y}} \dot{y} = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее нижние индексы указывают переменные, относительно которых вычисляются частные производные.

Полная производная гамильтониана по времени в силу уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= F_x \dot{x} + F_{\dot{x}} \ddot{x} + F_y \dot{y} + F_{\dot{y}} \ddot{y} - \dot{x} F_{\dot{x}} - \\ &- \dot{x} [F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{x} + F_{\dot{x}\ddot{x}} \ddot{x} + F_{\dot{x}y} \dot{y} + F_{\dot{x}\dot{y}} \dot{y}] - \dot{y} F_{\dot{y}} - \\ &- \dot{y} [F_{\dot{y}\dot{x}} \dot{x} + F_{\dot{y}\ddot{x}} \ddot{x} + F_{\dot{y}y} \dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}} \dot{y}] = \\ &= \dot{x} [F_x - F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{x} - F_{\dot{x}\ddot{x}} \ddot{x} - F_{\dot{x}y} \dot{y} - F_{\dot{x}\dot{y}} \dot{y}] + \\ &+ \dot{y} [F_y - F_{\dot{y}\dot{x}} \dot{x} - F_{\dot{y}\ddot{x}} \ddot{x} - F_{\dot{y}y} \dot{y} - F_{\dot{y}\dot{y}} \dot{y}]. \end{aligned}$$

В силу уравнений (5) и (6)

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.}$$

Из этого равенства следует, что гамильтониан Φ является первым интегралом системы уравнений Эйлера. С другой стороны, для подынтегральной функции (4) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dot{x} F_{\dot{x}} &= \sum_{i=1}^N \dot{x} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{m-1} 2\dot{x}}{[\sqrt{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2}]^n} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{2m\dot{x}^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{m-1}}{[\sqrt{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2}]^n}. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение выписывается для производной по второй координате. Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= F - \dot{x} F_{\dot{x}} - \dot{y} F_{\dot{y}} = \sum_{i=1}^N \frac{(1-2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{[\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}]^2} = \\ &= (1-2m)F = \text{const} \Rightarrow F = \text{const.} \end{aligned}$$

Утверждение доказано. ♦

В настоящей статье решение оптимизационной задачи находится для случая ($m = 1, n = 2$) — см. формулу (1). Это соответствует изменению уровня интенсивности излучаемого сигнала пропорционально квадрату скорости объекта и распростране-

нию сигнала в среде по сферическому закону, что характерно для распространения гидроакустических сигналов в глубоком море [14]. Критерий принимает вид:

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2} dt. \quad (7)$$

Решение задачи для случая одного сенсора ($N = 1$) было найдено аналитически [10, 11].

Функционал в этом случае имеет вид

$$R = \int_0^T \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2} dt.$$

Вводится полярная система координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута. В этой системе начальные условия задачи имеют вид:

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \delta,$$

а уравнение оптимальной траектории — вид [10, 11]:

$$\rho(\psi) = \rho_A \exp\left(\frac{\psi \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}}{\delta}\right). \quad (8)$$

Геометрический образ уравнения (8) — логарифмическая спираль, проходящая через граничные точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Оптимальный закон изменения скорости

$$v(\psi) = c\rho(\psi) = c\rho_A \exp\left(\frac{\psi \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}}{\delta}\right) = v_0 \exp\left(\frac{\psi \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}}{\delta}\right), \quad (9)$$

где v_0 — начальная скорость объекта; постоянная c определяется из условия прохождения объектом маршрута по оптимальной траектории с использованием оптимального закона изменения скорости за заданное время T ,

$$c = \frac{1}{T} \sqrt{\delta^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A}}. \quad (10)$$

В силу выражений (9) и (10) постоянный мгновенный уровень интенсивности сигнала на входе сенсора

$$w = \frac{v_0^2}{\rho_A^2} = c^2 = \frac{1}{T^2} \left(\delta^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A} \right). \quad (11)$$

Аналитическое решение задачи об уклонении от обнаружения одиночным сенсором (9)—(11) используется далее для верификации численного алгоритма оптимизации.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ

Для оптимизации закона уклонения от обнаружения группой сенсоров был разработан численный метод. В его основе лежит алгоритм Дейкстры [15]. Этот алгоритм был применен в работе [1] также для решения задачи об уклонении от обнаружения, но, в отличие от рассматриваемого нами случая, уклонение объекта осуществлялось на постоянной скорости.

На плоскости строится квадратная сетка с расстоянием L между узлами. Каждый узел соединяется отрезками (ребрами) с 32 соседними узлами (рис. 1). Длины ребер равны L , $L\sqrt{2}$, $L\sqrt{5}$, $L\sqrt{10}$ и $L\sqrt{13}$. Множество допустимых траекторий подвижного объекта аппроксимируется неориентированным графом $G = (S, D)$, где $S = \{1, \dots, n\}$ — множество n узлов, D — множество неориентированных дуг.

Траектория $(x(\cdot), y(\cdot))$ объекта аппроксимируется отрезком пути P на графе G , где путь P определяется как последовательность узлов (j_0, \dots, j_p) таких, что $j_0 = A$, $j_p = B$, и дуг (ребер) $\langle j_{k-1}, j_k \rangle \in D$ для всех k от 1 до P . Принимается, что объект уклоняется на кусочно-постоянной скорости; на траектории движения между двумя соседними узлами скорость постоянна. Вводятся обозначения: t_{j_k} — момент попадания объекта в узел j_k ; $v(j_{k-1}, j_k)$ — скорость движения объекта на ребре $\langle j_{k-1}, j_k \rangle$ между двумя соседними узлами.

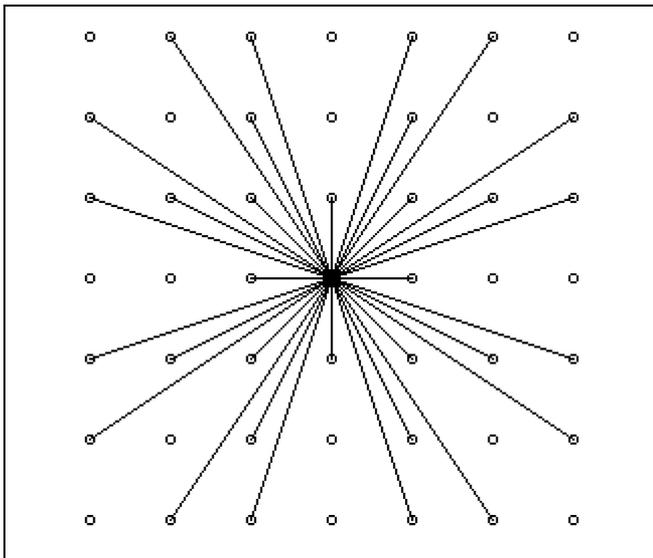


Рис. 1. Фрагмент графа

При принятых предположениях задача оптимизации функционала (7) сводится к задаче минимизации критерия

$$R = \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^N \int_{t_{j_{k-1}}}^{t_{j_k}} \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{\rho_i^2} dt \quad (12)$$

при наличии ограничения

$$\sum_{k=1}^P (t_{j_k} - t_{j_{k-1}}) = T, \quad (13)$$

где T — фиксированное время движения объекта. Суммирование в формуле (12) ведется по числу ребер, включенных в маршрут, и по числу сенсоров.

Задача уклонения от обнаружения имеет смысл в том случае, когда на траектории уклонения сенсоры и объект разделяют достаточно большие расстояния. При достаточно мелкой сетке можно считать, что на интервале времени движения по ребру расстояние между сенсором и объектом остается постоянным и принять его равным, например, расстоянию в момент попадания на начальный узел ребра. Обозначим это расстояние символом $\rho_i(j_{k-1})$.

Из изложенного в § 1 следует, при движении объекта по оптимальной траектории с использованием оптимального закона изменения скорости должно выполняться равенство

$$v^2(j_{k-1}, j_k) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i^2(j_{k-1})} = C, \quad (14)$$

где C — некоторая постоянная (значение первого интеграла). В частности, в случае одного сенсора, в соответствии с формулой (11),

$$C = \frac{1}{T^2} \left(\delta^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A} \right).$$

Обозначим символом $L(j_{k-1}, j_k)$ длину ребра $\langle j_{k-1}, j_k \rangle \in D$. Тогда, при фиксированном значении первого интеграла, по формуле (14) для каждого ребра определяется оптимальная скорость движения, и далее — время движения по ребру

$$T_{j_k j_{k-1}} = t_{j_k} - t_{j_{k-1}} = \frac{L(j_{k-1}, j_k)}{v(j_{k-1}, j_k)}. \quad (15)$$

Задача о минимизации функционала (12) свелась к задаче о минимизации функции

$$R = \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^N \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{\rho_i^2(j_{k-1})} (t_{j_k} - t_{j_{k-1}})$$



при наличии начальных условий (2) и ограничений (13), (14).

Алгоритм оптимизации закона управления подвижным объектом состоит в следующем.

Шаг 1. Вводится система координат; задаются координаты начальной и конечной точек маршрута, число сенсоров и их координаты; задается время движения объекта. Определяются шаг сетки и координаты узлов. Начальная и конечная точки маршрута входят в число узлов сетки. Задается произвольное положительное число C — начальное значение первого интеграла.

Шаг 2. По мере перемещения по сетке, для произвольного узла с номером j_{k-1} определяются два значения — частичная сумма (накопленное значение) $R_{j_{k-1}}$ и время движения $T_{j_{k-1}}$ от начального узла сетки до данного узла. Для начальной точки

маршрута эти значения устанавливаются равными нулю.

В каждом узле делается шаг расчета. Вначале определяется множество возможных ребер. Возможным ребром считается ребро, ведущее в узел, из которого еще не делался шаг расчета и которое не ведет в узлы, находящиеся вне области нахождения решения.

Для каждого возможного ребра, по формулам (14) и (15), рассчитывается величина

$$R_{j_{k-1}j_k} = \sum_{i=1}^N \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{\rho_i^2(j_{k-1})} (t_{j_k} - t_{j_{k-1}}).$$

При попадании в узел j_k из узла j_{k-1} определяются значения

$$R_{j_k} = R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}, \quad T_{j_k} = T_{j_{k-1}} + T_{j_{k-1}j_k}.$$

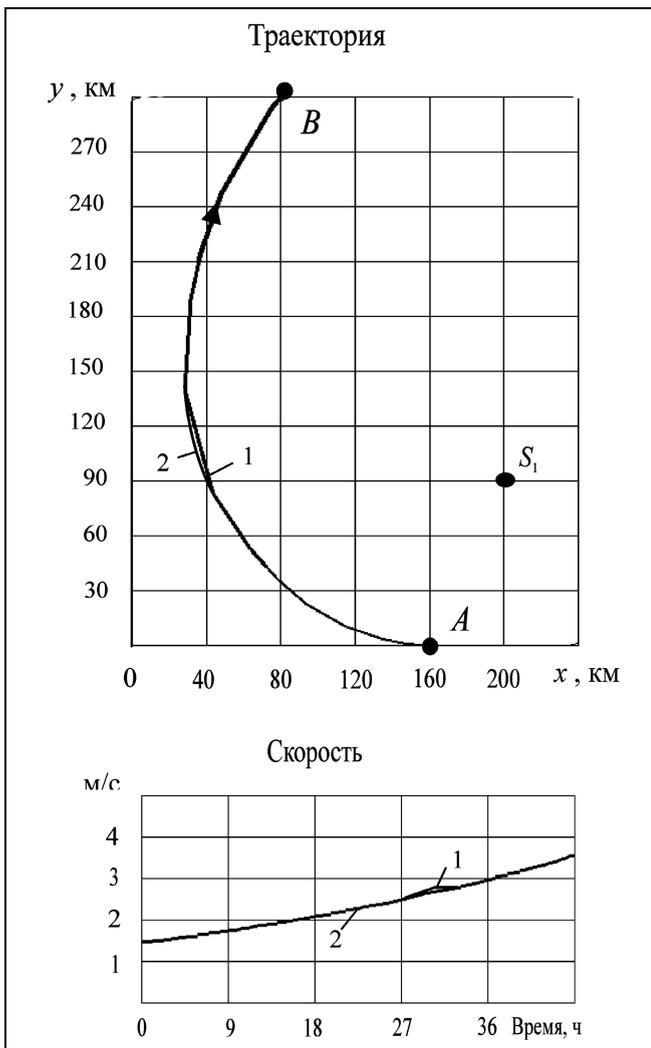


Рис. 2. Оптимальный закон уклонения; один сенсор

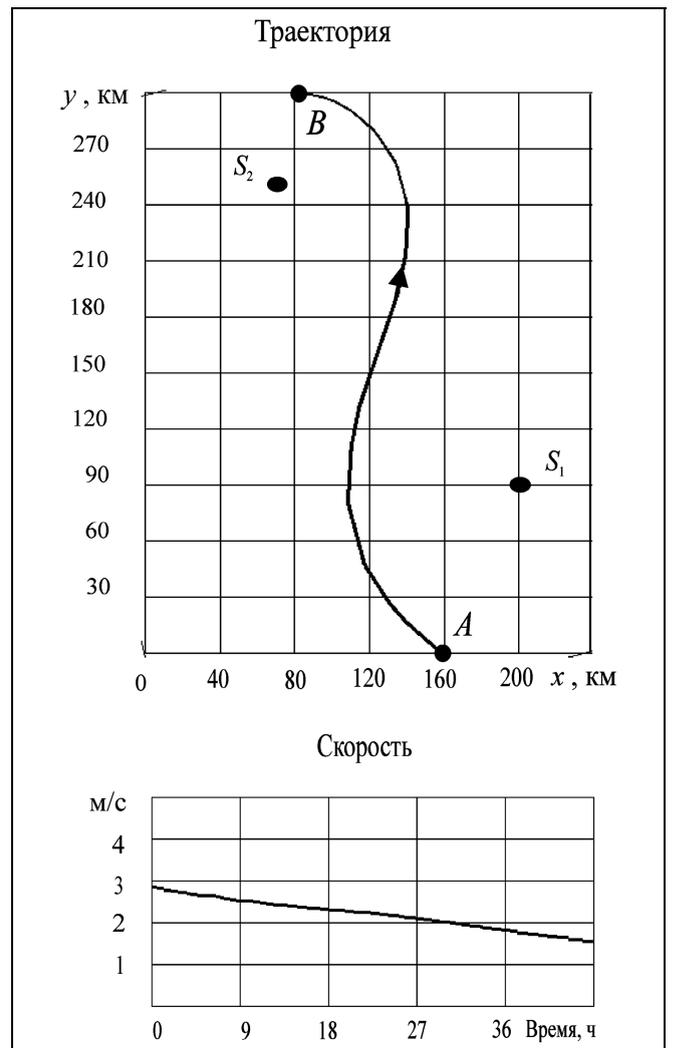


Рис. 3. Оптимальный закон уклонения; два сенсора

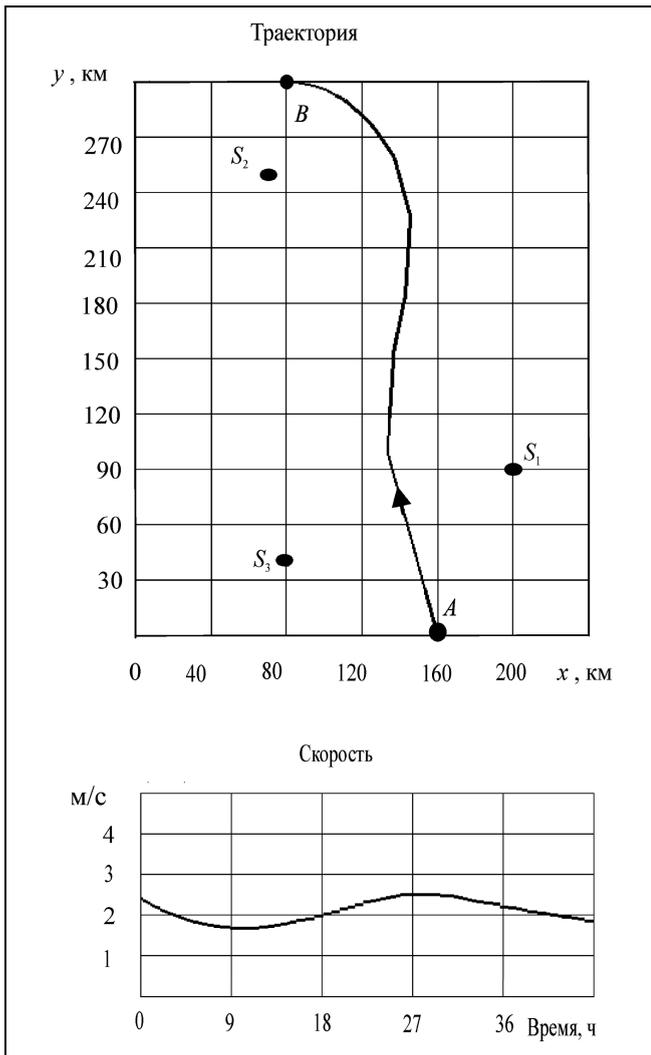


Рис. 4. Оптимальный закон уклонения; три сенсора

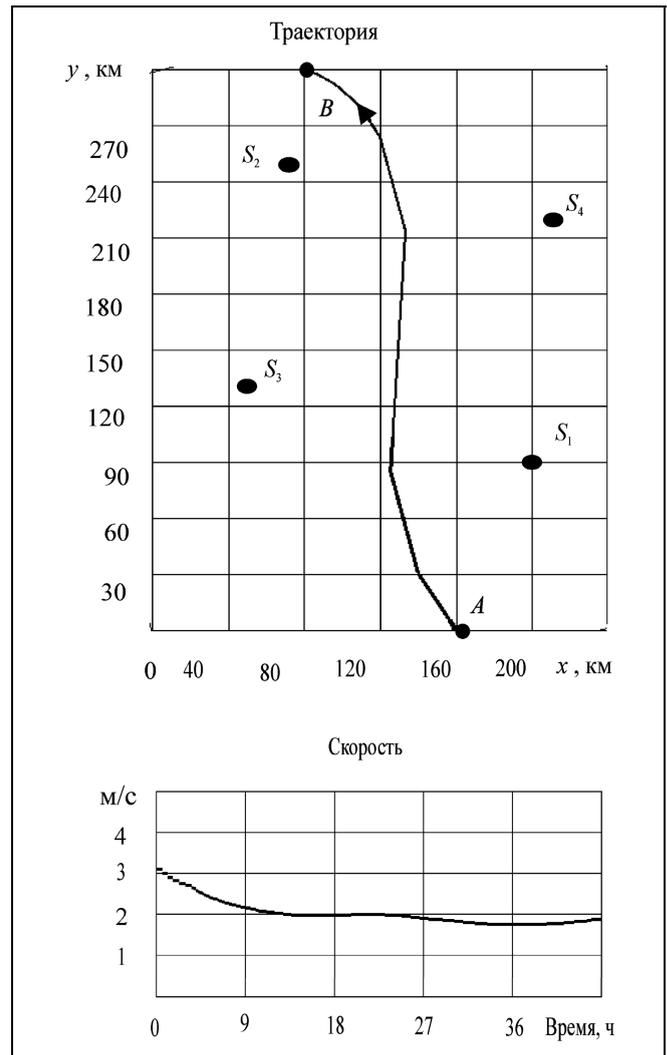


Рис. 5. Оптимальный закон уклонения; четыре сенсора

Если ранее в этом узле уже были установлены значения указанных параметров, то сравнивается ранее установленное значение R_{j_k} с суммой $R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$. Если $R_{j_k} > R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$, то устанавливаются новые значения $R_{j_k} = R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$ и $T_{j_k} = T_{j_{k-1}} + T_{j_{k-1}j_k}$; присваивается узлу номер $N_{j_k} = j_{k-1}$ (смысл операции — указание номера узла, из которого был осуществлен переход в данный узел).

Шаг 3. Из множества узлов, для которых установлены значения параметров и из которых не делался шаг расчета, выбирается узел j_k , которому соответствует минимальное значение R_{j_k} . Если такого узла нет, т. е. время достижения узла R_{j_k} пре-

восходит заданное время прохождения маршрута T , то задача, при выбранном значении первого интеграла, решения не имеет. В противном случае — переход к шагу 2 для узла j_k .

Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока конечная точка маршрута не попадет в множество точек, из которых делался шаг расчета.

Шаг 4. Сравниваются время T_C достижения конечной точки и заданное время прохождения маршрута T . При $|T_C - T| > \Delta$, где Δ — величина, характеризующая принятую точность выполнения ограничения (13), выбирается новое значение первого интеграла C . Далее выполняется переход к шагу 2 для начального узла.

Решение задачи — путь, для которого значение первого интеграла минимально и при котором выполняется ограничение $|T_C - T| \leq \Delta$.



3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель моделирования состояла в построении оптимальной траектории уклонения объекта от обнаружения группой сенсоров и определении оптимального закона изменения скорости на траектории.

Результаты моделирования иллюстрируются рис. 2—5. На каждом рисунке изображены составляющие оптимального закона управления подвижным объектом — оптимальная траектория уклонения и оптимальный закон изменения скорости как функция текущего момента времени. Рисунки отличаются числом сенсоров в регионе. На рисунках указаны положения начальной A и конечной B точек маршрута; число и расположение сенсоров, обозначенных символами S_i , $i = 1...4$. Моделирование проводилось для региона размерами 240×300 км. При всех вычислительных экспериментах положения точек A , B и S_1 не менялись; координаты их указаны на рисунках. Время прохождения маршрута составляло 45 ч. Шаг сетки — 1,945 км.

На рис. 2 изображены две траектории и два графика изменения скорости в задаче уклонения от единственного сенсора. Кривые, полученные моделированием, обозначены цифрой 1. Кривые, обозначенные цифрой 2, иллюстрируют теоретическое решение задачи уклонения — см. формулы (8), (9). Кривые, полученные теоретически и моделированием, практически совпадают. Такая высокая точность аппроксимации позволяет рассматривать описанный алгоритм в качестве возможного способа оптимизации закона управления подвижным объектом в задачах уклонения от обнаружения группой сенсоров. Полученные моделированием оптимальные траектории уклонения и графики изменения скорости для случаев нескольких сенсоров изображены на рис. 3—5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано решение вариационной задачи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения системой сенсоров. Критерием служит интегральный уровень сигнала, принятого системой сенсоров за время прохождения маршрута объектом. Предполагается, что текущий уровень сигнала прямо пропорционален скорости объекта и обратно пропорционален дистанции до сенсора. Для случая степенных зависимостей уровня сигнала от скорости и дистанции показано, что при движении по оптимальной траектории уклонения и оптимальном законе изменения скорости текущий уровень сигнала, принятого системой сенсоров, остается постоянным и представляет

собой первый интеграл уравнений Эйлера для вариационной задачи. Этот факт использован для нахождения оптимального закона управления объектом. Для случая одного сенсора получено аналитическое решение задачи. Для случая нескольких сенсоров предложен численный алгоритм оптимизации. Приведены результаты моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. Ch. 1 / Eds. Murphey R., Pardalos P. — Dordrecht: Kluwer Acad., 2002. — P. 271—303.
2. *Pachter L.S., Pachter M.* Optimal Paths for Avoiding a Radiating Source // Proc. 40 IEEE Conf. Des. and Contr. — 2001. — P. 3581—3686.
3. *Caccetta L., van Loosen I., Rehbock V.* Effective Algorithms for a Class of Discrete Valued Optimal Control Problems // Optimization & Cooperative Ctrl. Strategies, Lectures Notes CIS, 381. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — P. 1—30.
4. *Sidhu H., Mercer G., Sexton M.* Optimal Path Trajectories in a Threat Environment // Journal of Battlefield Technology. — 2006. — Vol. 9, N 3. — P. 33—40.
5. *Meguerdichian S., Koushanfar F., Qu G.* Exposure in Wireless Ad-hoc Sensor Networks // Proc. Int. Conf. MobiCom'01. — 2001. — P. 139—150.
6. *Veltri G., Huang Q., Potkonjak M.* Minimal and Maximal Exposure Path Algorithms for Wireless Embedded Sensor Networks // Proc. Int. Conf. Sensor Systems. SenSys'03. — 2003. — P. 242—249.
7. *Воронин А.Н., Ясинский А.Г., Шворов С.А.* Синтез компромисно-оптимальных траекторий мобильных роботов в конфликтной среде // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 12—18.
8. *Rehbock V., Caccetta L.* Two Defence applications involving Discrete Valued Optimal Control // ANZIAM J. 44(E). — 2002. — P. E33—E54.
9. *Hallam C., Harrison R., Ward J.* A multiobjective optimal path algorithm // Digital Signal Processing. — 2001. — Vol. 11(2). — P. 133—143.
10. *Галеев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 3. — С. 134—140.
11. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Там же. — 2010. — № 4. — С. 43—53.
12. *Mercer G., Sidhu H.* Two continuous methods for determining a minimal risk path through a minefield // ANZIAM J. 48(E). — 2007. — P. C293—C306.
13. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. — М.: Наука, 1973.
14. *Бурдик В.С.* Анализ гидроакустических систем. — Л.: Наука, 1988.
15. *Dijkstra E.* A note of two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik. — 1959. — N 1. — P. 269—271.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Абрамянц Тамара Гургеновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-91-81, ✉ abramnc@ipu.ru,

Маслов Евгений Петрович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☎(495) 334-91-81, ✉ maslovep@ipu.ru,

Яхно Виктор Павлович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-88-91,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.