

# ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ПРИЗНАКУ «СЛЕД».

## 4. 2. Оптимизация поисковых траекторий<sup>1</sup>

Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно

В задаче об оптимизации поисковой траектории преследователя, осуществляющего обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след», в явном виде найдены оптимальные траектории для различных начальных условий.

**Ключевые слова:** поиск подвижного объекта, поисковая ситуация, «след» объекта, оптимальная траектория поиска.

### ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи об оптимизации программной поисковой траектории преследователя, осуществляющего обнаружение подвижного объекта (цели) и сближение с ним по информационному признаку «след», изложена в первой части статьи [1].

Задача решается при следующих предположениях:

- в начальный момент времени цель выбирает направление прямолинейной траектории, по которой движется с постоянной скоростью  $v_E$ ; за целью тянется след постоянной длины  $R$ ;

- обнаружение следа поисковой системой (преследователем) происходит в момент  $t_n$  пересечения следа траекторией преследователя; в случае обнаружения следа преследователь движется далее вдоль следа до момента встречи с целью.

Критерием служит максимальная длительность интервала времени до момента точечной встречи объектов.

В первой части статьи [1] была установлена общая структура оптимального управления преследователя — показано, что по траектории преследователь движется с постоянной скоростью  $v_p$ , а оптимальная траектория поиска включает в себя

прямолинейные участки и может включать участок логарифмической спирали. Конкретный вид поисковой траектории зависит от соотношений между входными параметрами задачи, к которым относятся: начальное расстояние  $D_0$ ; длина следа  $R$ ; скорости объектов  $v_E$  и  $v_p$ ; расположение начальной  $\psi_n$  и конечной  $\psi_k$  границ диапазона возможных направлений движения цели  $\Delta\psi = [\psi_n, \psi_k]$ .

В настоящей, второй, части статьи определяется конкретный вид оптимальных поисковых траекторий для произвольных сочетаний указанных величин.

Вводится неподвижная прямоугольная система координат  $XOY$ , начало которой совмещено с начальным положением преследователя  $P_0$ , а ось  $OY$  проходит через начальное положение цели  $E^0$  (рис. 1); здесь и далее верхний индекс при обозначении позиций объектов указывает момент времени. Углы отсчитываются от оси  $OY$ ; положительным считается отсчет по часовой стрелке.

В момент  $t = 0$  цель выбирает направление движения  $\psi$  (угол между траекторией и осью  $OY$ ) из диапазона углов  $\Delta\psi = [\psi_n, \psi_k]$ . Далее символом  $(\psi)$  обозначается луч, исходящий из точки  $E^0$  под углом  $\psi$  к оси  $OY$ ; символом  $E(\psi)$  — цель, движущаяся вдоль луча  $(\psi)$ ; символом  $E^t(\psi)$  — положение цели, движущейся вдоль луча  $(\psi)$ , в момент  $t$ ; символом  $P^t = E^t(\psi)$  — событие, состоящее в совпадении в момент  $t$  позиций преследователя и цели, движущейся вдоль луча  $(\psi)$  (точечная встреча).

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 29 Президиума РАН «Математическая теория управления».



Преследователь управляет направлением своего движения.

Решение задачи находится для случая, когда цель движется в полуплоскости  $x \geq 0$ ;  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

При движении по программной поисковой траектории для любого  $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$  должны выполняться следующие условия:

$$\langle e_z, e_v \rangle_{t_n} = 1, \quad (1)$$

$$\|z(t_n)\| \leq R, \quad (2)$$

где  $z(t)$  — вектор, направленный от  $P$  к  $E$  в момент времени  $t$ ;  $e_z$  — единичный вектор, коллинеарный вектору  $z(t_n)$ , соединяющему позиции преследователя и цели в момент  $t_n$  пересечения луча траекторией преследователя;  $e_v$  — единичный вектор, коллинеарный вектору скорости цели в этот момент;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение.

### 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В первой части статьи [1] было установлено, что первым участком оптимальной поисковой траектории всегда является прямолинейный отрезок. В работе [2] было показано, что при определенных соотношениях между входными параметрами ( $D_0$ ;  $R$ ;  $v_E$ ,  $v_P$ ;  $\psi_H$ ;  $\psi_K$ ) существует прямолинейная оптимальная поисковая траектория, обеспечивающая минимально возможное время движения преследователя до момента реализации терминального условия  $P^T = E^T(\psi_H)$ . Соответствующее программное управление преследователя имеет вид:

$$\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H); \quad \beta = v_E/v_P, \quad (3)$$

Оптимальная прямолинейная поисковая траектория существует, если справедлива система неравенств:

$$\psi_K \leq \pi - \psi_H, \quad (4)$$

$$\max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_n, \varphi_H, \psi) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_H) \leq R, \quad (5)$$

где  $(\varphi, \psi)$  — направления движения преследователя и цели, соответственно; символом  $D(t_n, \varphi, \psi)$  обозначено расстояние между преследователем и целью в момент пересечения траекторией преследователя луча  $(\psi)$ ;

$$\psi^*(\varphi_H) = \varphi_H + \gamma \quad (6)$$

— то направление движения цели, на котором достигается максимальное расстояние между объектами в момент пересечения луча прямолинейной траекторией преследователя, отвечающей формуле (3);  $\gamma = \arccos \beta$ .

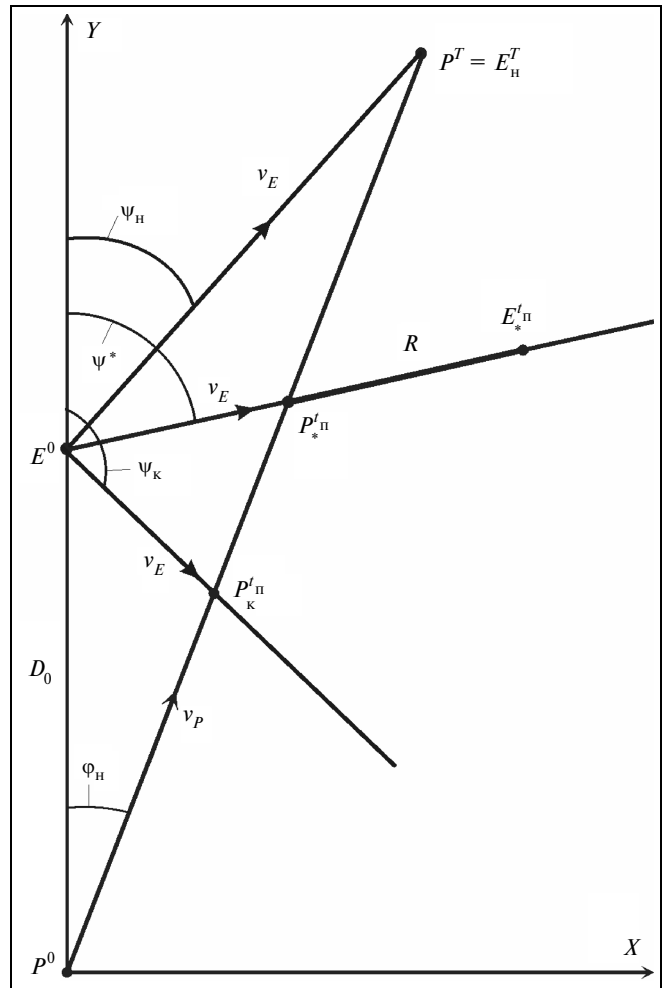


Рис. 1. Оптимальная прямолинейная траектория

В терминах параметров задачи неравенство (5) переписывается в виде:

$$\arccos(R/D_0) - \arccos \beta \leq \arcsin(\beta \sin \psi_H).$$

Решение оптимизационной задачи для указанного случая иллюстрируется рис. 1, построенном для предельного случая  $\psi_K = \pi - \psi_H$ . Здесь  $P_*^t_n$  и  $E_*^t_n$  — положения преследователя и цели в момент  $R$ -встречи с точкой  $E(\psi^*(\varphi_H))$ ;  $P_*^t_n$  — положение преследователя в момент точечной встречи  $P^t_n = E^t_n(\varphi_K)$ . Все остальные обозначения на рис. 1 совпадают с приведенными в тексте. Длительность интервала времени движения на прямолинейной поисковой оптимальной траектории

$$T = \frac{D_0}{v_P(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi_H} - \beta \cos \psi_H)}.$$

Пусть

$$\max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_{\Pi}, \varphi_H, \psi) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_H) > R.$$

В этом случае оптимальной прямолинейной поисковой траектории не существует. В фазовом пространстве первый прямолинейный участок поисковой траектории заканчивается выходом текущего положения цели на ограничения (1) и (2). Решение задачи об оптимизации сводится к построению траектории, которая удовлетворяла бы ограничениям (1) и (2), и длина которой наименее отличалась бы от длины прямолинейной поисковой траектории.

Структура оптимальных траекторий зависит от соотношений между углами (направлениями движения)  $\psi_H, \psi^*(\varphi_H), \psi_K$ .

Возможны три случая:

- $\psi_K \leq \pi - \psi_H, \psi^*(\varphi_H) \leq \psi_K$ ; сектор направлений движения цели  $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$ , удовлетворяющий этой системе, далее называется сектором типа 1;
- $\psi_K \leq \pi - \psi_H, \psi_K \leq \psi^*(\varphi_H)$ ; соответствующий сектор называется сектором типа 2;
- $\psi_K > \pi - \psi_H$ ; соответствующий сектор называется сектором типа 3.

### 1.1. Поиск в секторе типа 1

Справедлива система неравенств

$$\psi^*(\varphi_H) \leq \psi_K \leq \pi - \psi_H$$

При фиксированных управлениях ( $\varphi, \psi$ ) момент пересечения луча ( $\psi$ ), удовлетворяющий условию (1), определяется по формуле [1]

$$t_{\Pi} = \frac{D_0 \sin \psi}{v_p \sin(\psi - \varphi)}, \quad (7)$$

а расстояние, разделяющее объекты в этот момент — по формуле

$$D(t_{\Pi}, \varphi, \psi) = D_0 \frac{|\beta \sin \psi - \sin \varphi|}{\sin(\psi - \varphi)}. \quad (8)$$

Отмечалось [1], что решаемая в настоящей статье задача представляет собой задачу геодезического преследования на плоскости с выпуклым подвижным препятствием, где в качестве препятствия выступает логарифмическая спираль — огибающая семейства расширяющихся окружностей — геометрических мест концов следов, а терминальная точка принадлежит огибающей геометрических мест позиций цели. Из результатов работ [3—5] следует, что в том случае, когда экстремаль, лежащая внутри области возможных позиций цели, включает в себя участок спирали — границы

подвижного препятствия, прямолинейные отрезки экстремали являются касательными к этой границе.

В точке касания одновременно выполняются равенства

$$D_0 \frac{|\beta \sin \psi - \sin \varphi|}{\sin(\psi - \varphi)} = R, \quad \psi - \varphi = \gamma,$$

где  $\varphi$  — направление движения преследователя,  $\psi \triangleq \psi(\varphi)$  — направление луча, на котором происходит касание спирали траекторией преследователя. Отсюда находим:

$$D_0 \cos(\varphi + \gamma) = D_0 \cos \psi(\varphi) = R.$$

Так как с ростом  $\varphi$  величина  $D_0 \cos(\varphi + \gamma)$  уменьшается, а, по предположению,

$$\max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_{\Pi}, \varphi_H, \psi) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_H) > R,$$

то найдется управление  $\varphi_1^R > \varphi_H$ , для которого справедливо равенство

$$D_0 \cos(\varphi_1^R + \gamma) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_1^R) = R. \quad (9)$$

В силу равенства (9) это управление имеет вид

$$\varphi_1^R = \arccos(R/D_0) - \arccos(v_E/v_p) \quad (10)$$

и зависит только от безразмерных величин; нижний индекс указывает номер участка программной поисковой траектории.

Из равенств (6) и (9) следует важный вывод: при фиксированном управлении  $\varphi$  в точке касания спирали траекторией преследователя достигается максимум расстояния между объектами.

Из формулы (8) следует, что с ростом  $\varphi$  увеличивается угол  $\psi_m(\varphi)$ , соответствующий тому направлению движения цели, при котором реализуется точечная встреча ее с преследователем, движущимся по направлению  $\varphi$ . В частности, точечной встрече преследователя с целью, движущейся вдоль граничного луча ( $\psi_K$ ) диапазона  $\Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$ , соответствует управление  $\varphi_K = \arcsin(\beta \sin \psi_K)$ .

Возможны два случая:

- $\varphi_1^R \leq \varphi_K$  — траектория преследователя, соответствующая управлению  $\varphi_1^R$ , пересекает след, расположенный на луче ( $\varphi_K$ );
- $\varphi_1^R > \varphi_K$  — траектория преследователя, соответствующая управлению  $\varphi_1^R$ , пересекает луч ( $\psi_K$ ) в области, где след существовать не может; в момент пересечения луча ( $\psi_K$ ) указанной траекторией  $\langle e_z, e_v \rangle_{t_{\Pi}} = -1$ .



Пусть  $\varphi_1^R \leq \varphi_k$ .

В этом случае первый прямолинейный участок заканчивается  $R$ -встречей с некоторой точкой  $E^{t_{\Pi}}$  ( $\varphi$ ), т. е. реализацией равенства  $\|z(t_{\Pi}, \psi)\| - R = 0$ . Направление движения преследователя на первом прямолинейном отрезке определяется формулой (10). Далее текущее положение цели перемещается в фазовом пространстве по окружности (что соответствует движению преследователя по спирали в неподвижной системе координат) до момента схода на заключительный прямолинейный участок, касающийся спирали в точке схода и проходящий через терминальную точку  $P^T = E^T(\psi_{\Pi})$ . Следовательно, в рассматриваемом случае поисковая траектория содержит три участка, отличающихся характером движения — первый прямолинейный участок, спиральный участок, заключительный прямолинейный участок. Первый и заключительный прямолинейные участки являются касательными к логарифмической спирали.

Длительность интервала времени движения на первом прямолинейном участке поисковой траектории, вычисленная по формуле (7) с учетом выражений (9) и (10),

$$T = \frac{\sqrt{D_0^2 - R^2}}{\sqrt{v_P^2 - v_E^2}}. \quad (11)$$

Длительности интервалов времени движения на двух других интервалах определяются формулами (17) и (19) первой части [1] статьи.

Пусть теперь  $\varphi_1^R > \varphi_k$ .

В этом случае направление движения преследователя на первом прямолинейном участке выбирается из условия точечной встречи  $P^t = E^t(\varphi_k)$  преследователя с целью, движущейся вдоль луча ( $\varphi_k$ ):

$$\varphi_1 = \varphi_k = \arcsin(\beta \sin \varphi_k).$$

Обозначим символом  $\theta$  момент точечной встречи  $P^{\theta} = E^{\theta}(\varphi_k)$ . Длительность первого прямолинейного участка

$$\theta = \frac{D_0}{v_P(\cos \varphi_k - \beta \cos \varphi_k)}. \quad (12)$$

В момент  $\theta$  преследователь изменяет направление движения и далее движется по направлению  $\varphi_2$  до момента  $t_{\Pi}$  пересечения некоторого луча ( $\varphi$ ):  $\varphi < \varphi_k$ . Соответствующий фрагмент поисковой траектории изображен на рис. 2. Здесь:  $P^{\theta} = E^{\theta}(\varphi_k)$  — позиция объектов в момент излома поисковой тра-

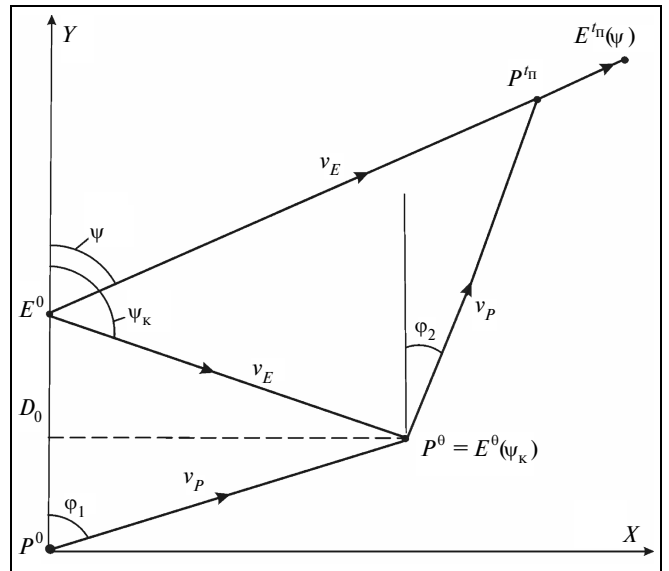


Рис. 2. Фрагмент кусочно-прямолинейной поисковой траектории

ектории;  $P^{t_{\Pi}}$ ,  $E^{t_{\Pi}}(\psi)$  — позиции объектов в момент пересечения луча ( $\psi$ ). Остальные обозначения на рис. 2 совпадают с обозначениями, приведенными в тексте.

Так как лучи ( $\psi_k$ ) и ( $\psi$ ) исходят из одной точки  $E^{\theta}$ , то условие пересечения произвольного луча ( $\psi$ ) в момент  $t_{\Pi} > \theta$  записывается в виде:

$$\operatorname{tg} \psi = \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)_{t_{\Pi}} = \frac{v_E t_{\Pi} \sin \psi - v_E \theta \sin \psi_k - v_P \omega \sin \varphi_2}{v_E t_{\Pi} \cos \psi - v_E \theta \cos \psi_k - v_P \omega \cos \varphi_2},$$

где  $\omega$  — длительность интервала времени от момента  $\theta$  излома поисковой траектории до момента  $t_{\Pi}$ . Отсюда находится длительность второго прямолинейного участка:

$$\omega = \beta \theta \frac{\sin(\psi_k - \psi)}{\sin(\psi - \varphi_2)}. \quad (13)$$

Расстояние между точками  $P^{t_{\Pi}}$  и  $E^{t_{\Pi}}(\psi)$  в момент  $t_{\Pi} = \theta + \omega$

$$\begin{aligned} \Delta(t_{\Pi}, \psi, \varphi_2) &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \\ &= v_E \theta \left| 1 + \frac{\beta \sin(\psi_k - \psi) - \sin(\psi_k - \varphi_2)}{\sin(\psi - \varphi_2)} \right|. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом

$$\max_{\psi} D(t_{\Pi}, \psi, \varphi_2) = v_E \theta [1 + \cos(\varphi_k - \psi^*)],$$

где единственный максимум достигается в точке

$$\psi^* = \psi^*(\varphi_2) = \varphi_2 + \gamma, \quad \cos \gamma = \beta. \quad (15)$$

Управление  $\varphi_2$ , реализующее  $R$ -встречу с лучом  $\psi^*(\varphi_2)$ , находится как корень уравнения

$$v_E \theta [1 + \cos(\psi_K - \psi^*)] = R.$$

Третьим участком оптимальной поисковой траектории является участок логарифмической спирали, начинающийся на луче ( $\psi^*$ ), определяемом формулой (15). Траектория на втором прямолинейном участке является касательной к спирали. Таким образом, в рассматриваемом случае оптимальная поисковая траектория содержит четыре участка — двухзвенную ломаную (первый прямолинейный участок — до момента точечной встречи  $P^I = E^I(\psi_K)$ , второй прямолинейный участок — до момента пересечения луча ( $\psi^*(\varphi_2^R)$ )), спиральный участок и заключительный прямолинейный участок.

### 1.2. Поиск в секторе типа 2

Справедливы неравенства

$$\psi_K \leq \pi - \psi_H, \quad \psi_K \leq \psi^*(\varphi_H).$$

Так как, по определению, в интервале  $[\psi; \psi > \psi_K]$  траектории цели отсутствуют, то при  $\psi_K < \psi^*(\varphi_H)$  максимальное расстояние между объектами на прямолинейной поисковой траектории, соответствующей равенству  $\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H)$ , достигается в момент пересечения луча  $\psi_K$ . Функция  $D(t_{\Pi}, \psi, \varphi_H)$  является убывающей функцией аргумента  $\psi$  на интервале  $[\psi_H, \psi_K]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_{\Pi}, \psi, \varphi_H) &= D(t_{\Pi}, \psi_K, \varphi_H) = \\ &= D_0 \frac{|\beta \sin \psi_K - \sin \varphi_H|}{\sin(\psi_K - \varphi_H)}. \end{aligned}$$

Для существования оптимальной прямолинейной поисковой траектории достаточно выполнение неравенства

$$D(t_{\Pi}, \psi_K, \varphi_H) \leq R. \quad (16)$$

Длительность интервала времени движения по оптимальной прямолинейной траектории определяется по формуле (7).

Пусть неравенство (16) не выполняется. Тогда управление  $\varphi_1$  на первом прямолинейном участке находится из условия  $R$ -встречи преследователя с лучом ( $\psi_K$ ):

$$D(t_1, \varphi_1, \psi_K) = D_0 \frac{|\beta \sin \psi_K - \sin \varphi_1|}{\sin(\psi_K - \varphi_1)} = R, \quad (17)$$

где  $t_1$  — длительность первого участка. Решение уравнения (17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \\ &= \sin \psi_K \frac{-\beta(\delta \cos \psi_K - 1) - \delta \sqrt{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \psi_K - \beta^2 \sin^2 \psi_K}}{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \psi_K}, \end{aligned}$$

где  $\delta = R/D_0$ . Длительность первого участка находится по формуле

$$t_1 = \frac{D_0 \sin \psi_K}{v_P \sin(\psi_K - \varphi_1)}. \quad (18)$$

В момент  $t_1$  происходит переход к следующему участку поисковой траектории.

Возможны два случая:

— существует прямолинейная траектория, проходящая через точки  $P^I(\psi_K)$  и  $P^T = E^T(\psi_H)$ ; тогда оптимальная поисковая траектория состоит из двух прямолинейных отрезков;

— не существует прямолинейной траектории, проходящей через точки  $P^I(\psi_K)$  и  $P^T = E^T(\psi_H)$ ; тогда оптимальная поисковая траектория содержит участок логарифмической спирали.

Рассмотрим первый случай. Пусть  $\varphi_2$  — направление движения преследователя на втором прямолинейном участке.

Условие пересечения траекторией преследователя луча ( $\psi_H$ ) в некоторый момент  $T > t_1$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \psi_H = \frac{v_E T \sin \psi_H - (v_E t_1 - R) \sin \psi_K - v_P \omega \sin \varphi_2}{v_E T \cos \psi_K - (v_E t_1 - R) \cos \psi_K - v_P \omega \cos \varphi_2}, \quad (19)$$

где символом  $\omega$  обозначена длительность второго прямолинейного участка. Из формулы (19) находим:

$$\omega = \frac{(v_E t_1 - R) \sin(\psi_K - \psi_H)}{v_P \sin(\psi_H - \varphi_2)}. \quad (20)$$

Направление движения преследователя  $\varphi_2$ , реализующее точечную встречу  $P^T = E^T(\psi_H)$ , находится из уравнения

$$\begin{aligned} D(T, \varphi_2, \psi_H) &= \left[ v_E t_1 + \right. \\ &\left. + (v_E t_1 - R) \frac{\beta \sin(\psi_K - \psi_H) - \sin(\psi_K - \varphi_2)}{\sin(\psi_H - \varphi_2)} \right] = 0, \end{aligned}$$

где  $t_1$  определяется формулой (18). Если на интервале  $[\psi_H, \psi_K]$  справедливо неравенство

$$\max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_{\Pi}, \varphi_2, \psi) \leq R, \quad (21)$$



то кусочно-прямолинейная траектория, второй участок которой соответствует управлению  $\varphi_2$ , является оптимальной поисковой траекторией.

Полное время движения по оптимальной двухзвенной поисковой траектории  $T = t_1 + \omega$ , где слабые определяются формулами (18) и (20).

Пусть неравенство (21) несправедливо. Так как в момент  $t_1$  реализуется R-встреча преследователя с лучом ( $\psi_k$ ), т. е. текущее положение цели уже находится на границе допустимого множества, то вторым участком оптимальной поисковой траектории является спиральный участок, начинающийся на луче ( $\psi_k$ ); третьим участком — прямолинейный отрезок, касающийся спирали и проходящий через точку  $P^T = E^T(\psi_H)$ .

### 1.3. Поиск в секторе типа 3

Справедливо неравенство

$$\psi_k > \pi - \psi_H.$$

Этот случай анализируется с помощью ряда формул, полученных ранее в п. 1.2.

Прямолинейной поисковой траектории не существует. Направление движения преследователя на первом прямолинейном участке выбирается из условия точечной встречи  $P^t = E^t(\psi_k)$  преследователя с целью, движущейся вдоль луча ( $\psi_k$ ):

$$\varphi_1 = \varphi_k = \arcsin(\beta \sin \psi_k)$$

Обозначим символом  $\theta$  момент точечной встречи  $P^\theta = E^\theta(\psi_k)$ . Длительность первого прямолинейного участка определяется формулой (12).

В момент  $\theta$  преследователь изменяет направление движения и далее движется по направлению  $\varphi_2$  до момента  $t_\pi$  пересечения траекторией преследователя некоторого луча ( $\psi$ ):  $\psi < \psi_k$ .

В зависимости от соотношений между параметрами задачи возможны два случая:

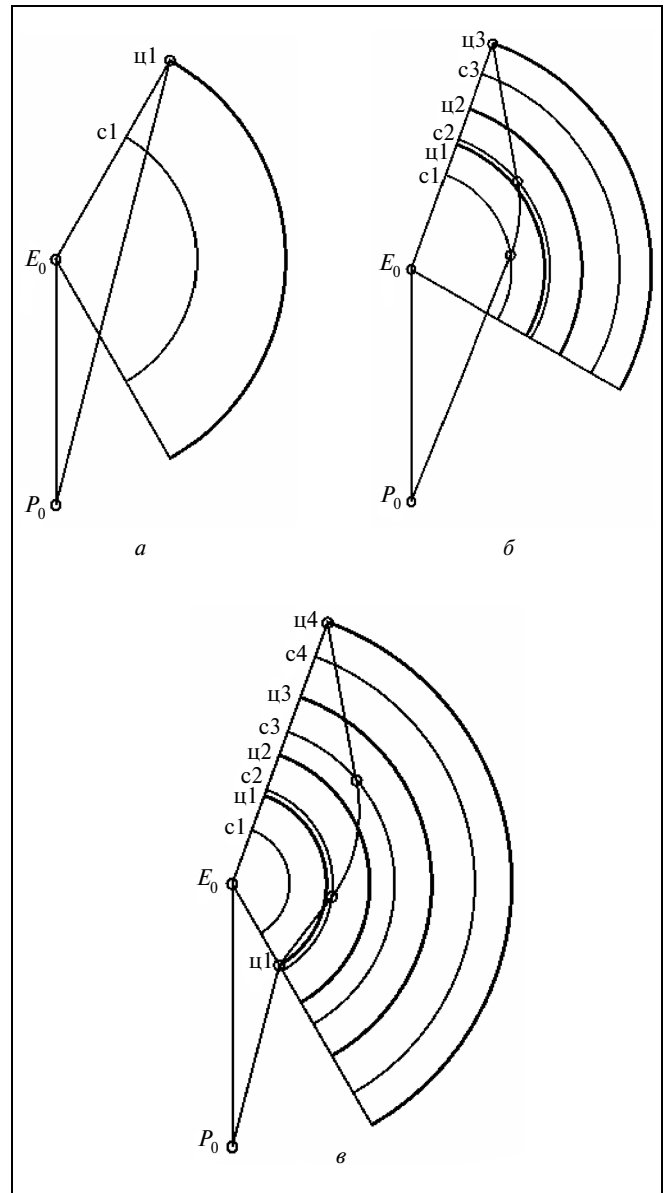
- на управлении  $\varphi_2$  реализуется точечная встреча  $P^T = E^T(\psi_H)$ ;
- на управлении  $\varphi_2$  реализуется R-встреча с лучом  $\psi^*(\varphi_2)$ .

Обозначим символом  $\varphi_2 \triangleq \varphi_2^0$  управление, реализующее точечную встречу с лучом ( $\psi_H$ ). Длительность второго прямолинейного участка определяется по формуле (13), а расстояние между точками  $P^{t_\pi}$  и  $E^{t_\pi}(\psi)$  в момент  $t_\pi = \theta + \omega$  — по формуле (14).

Управление  $\varphi_2^0$  удовлетворяет равенству  $D(t_\pi, \psi_H, \varphi_2) = 0$ . Отсюда получается уравнение для нахождения  $\varphi_2^0$ :

$$\cos\left(\frac{\psi_k + \psi_H - \varphi_2^0}{2}\right) = \beta \cos\left(\frac{\psi_k + \psi_H}{2}\right). \quad (22)$$

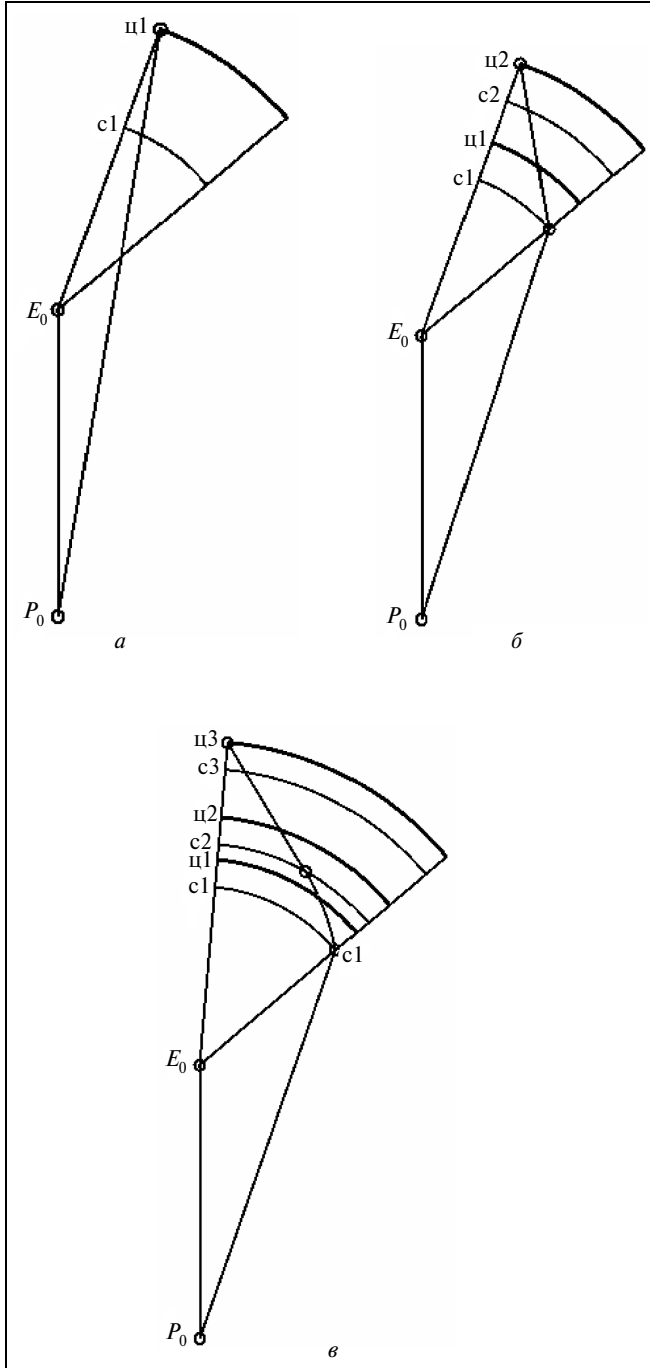
Управление  $\varphi_2^0$  реализует прямолинейную поисковую траекторию, проходящую через точки  $P^\theta = E^\theta(\psi_k)$  и  $P^T = E^T(\psi_H)$ .



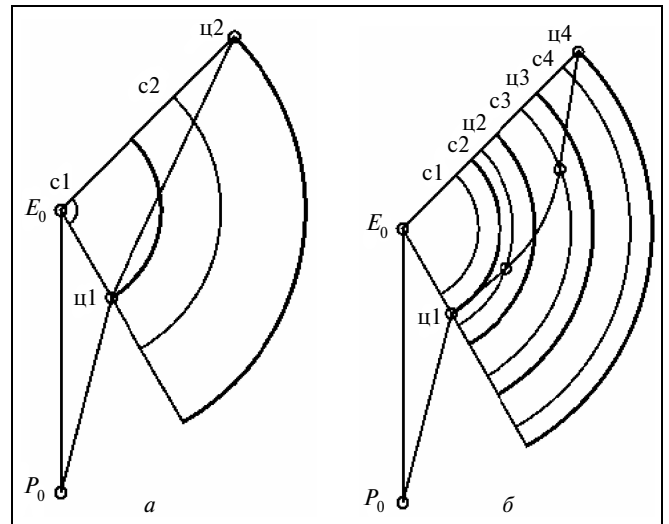
**Рис. 3. Оптимальные траектории поиска в секторе типа 1:**  
 а — прямолинейная поисковая траектория,  $\delta = 0,36$ ,  $\psi_H = 30^\circ$ ,  $\psi_k = 150^\circ$ ; б — трехзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,14$ ,  $\psi_H = 20^\circ$ ,  $\psi_k = 120^\circ$ ; в — четырехзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,14$ ,  $\psi_H = 20^\circ$ ,  $\psi_k = 150^\circ$

Обозначим символом  $\varphi_2 \triangleq \varphi_2^R$  управление, на котором реализуется  $R$ -встреча с лучом  $\psi^*(\varphi_2)$ . Направление этого луча определяется уравнением

$$\max_{\psi} (t_{\Pi}, \psi, \varphi_2) = v_E \theta [1 + \cos(\psi_K - \psi^*)] = R.$$



**Рис. 4. Оптимальные траектории поиска в секторе типа 2:**  
 а — прямолинейная поисковая траектория,  $\delta = 0,34$ ,  $\psi_H = 20^\circ$ ,  $\psi_K = 50^\circ$ ; б — двухзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,14$ ,  $\psi_H = 20^\circ$ ,  $\psi_K = 50^\circ$ ; в — трехзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,1$ ,  $\psi_H = 5^\circ$ ,  $\psi_K = 50^\circ$



**Рис. 5. Оптимальные траектории поиска в секторе типа 3:**  
 а — двухзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,3$ ,  $\psi_H = 45^\circ$ ,  $\psi_K = 150^\circ$ ; б — четырехзвенная поисковая траектория,  $\delta = 0,08$ ,  $\psi_H = 45^\circ$ ,  $\psi_K = 150^\circ$

Если  $\varphi_2^R \leq \varphi_2^0$ , то оптимальной поисковой траекторией является двухзвенная кусочно-прямолинейная ломаная  $P^0 P^0 P^T$ .

Время движения по оптимальной двухзвенной траектории вычисляется по формуле

$$T = \theta + \omega = \theta \left[ 1 + \beta \frac{\sin(\psi_K - \psi_H)}{\sin(\psi_H - \varphi_2^0)} \right],$$

где длительность  $\theta$  определяется формулой (12), а угол  $\varphi_2^0$  — уравнением (22).

Если  $\varphi_2^0 < \varphi_2^R$ , то оптимальная поисковая траектория состоит из четырех участков, включая спиральный участок. Анализ этого случая аналогичен изложенному в п. 1.2.

Результаты проведенного анализа иллюстрируются рис. 3—5. На этих рисунках изображены типовые оптимальные поисковые траектории, соответствующие различным соотношениям между параметрами задачи. Траектории на рис. 3 соответствуют поиску в секторе типа 1; траектории на рис. 4 — поиску в секторе типа 2; траектории на рис. 5 — поиску в секторе типа 3.

На каждом из рисунков изображены начальное и конечное положения объектов  $P^0$  и  $E^0$  и оптимальные поисковые траектории. Дуги окружностей есть геометрические места положений цели (на всех рисунках обозначены буквой «ц» и изображены полужирными линиями) и конца следа (обозначены буквой «с» и изображены тонкими



линиями); номера при обозначениях соответствуют номеру участка поисковой траектории. Точками обозначены позиции преследователя в момент перехода от одного участка поисковой траектории к другому. Все рисунки построены для случая  $\beta = v_E/v_P = 0,5$ . Значения остальных безразмерных параметров  $\delta = R/D_0$ ,  $\psi_n$  и  $\psi_k$  указаны на рисунках.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье (части 1 и 2) даны постановка и решение задачи об оптимизации программной поисковой траектории преследователя, осуществляющего обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след». Установлена общая структура оптимальной поисковой траектории. Показано, что оптимальная поисковая траектория состоит из одного или нескольких прямолинейных участков и не более, чем одного спирального участка. При этом спиральный участок может отсутствовать, а в том случае, когда спиральный участок есть, он находится между прямолинейными участками траектории. В зависимости от соотношений между параметрами задачи возможны восемь сценариев развития поисковых ситуаций, реализующихся на четырех типах оптимальных поисковых траекторий, содержащих один, два, три и четыре участка.

Авторы выражают признательность рецензенту за сделанные замечания, учет которых позволил существенно улучшить изложение материала статьи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Поиск подвижного объекта по информационному признаку «след». Ч. 1. Общая структура оптимальной поисковой траектории / Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 61—68.
2. Кинематическая задача поиска подвижного объекта по информационному признаку «след» / Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно // Подводное морское оружие. — 2008. — Вып. 12. — С. 95—102.
3. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 4. — С. 613—620.
4. Glizer Y.Y. Optimal Planar Interception with Fixed End Conditions: Closed-Form Solution // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1996. — Vol. 88, N 3. — P. 503—539.
5. Hybrid Geodesics as Optimal Solutions to the Collision-Free Motion Planning Problem / J. Hu, M. Prandini, R. Johansson, S. Sastry // Lecture Notes in Computer Science. — Berlin: Springer, 2001. — Vol. 234. — P. 305—318.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

**Абрамянц Тамара Гургеновна** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-91-81, ✉ abramnc@ipu.ru,

**Беланов Юрий Арсеньевич** — д-р техн. наук, пенсионер, работал в ЦНИИ автоматики и гидравлики, г. Москва,

**Маслов Евгений Петрович** — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☎(495) 334-91-81, ✉ maslovep@ipu.ru,

**Яхно Виктор Павлович** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-88-91,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

### Содержание сборника "Управление большими системами", вып. 26, <http://pu.mtas.ru>

- ✓ **Болотова Л.С., Мороз Ю.В.** Игровые подходы к обучению инженера по знаниям
- ✓ **Гусев В.Б., Павельев В.В., Павельев С.В.** Выбор оптимального механизма саморегулирования системы защиты центра обработки данных от аварий и катастроф
- ✓ **Тукубаев З.Б.** Моделирование и исследование алгоритмов динамического управления потоками и очередями сообщений в компьютерных сетях
- ✓ **Гонтарев А.В., Чхартисвили А.Г.** О явных и скрытых коалициях в рефлексивных играх
- ✓ **Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.** Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды
- ✓ **Золотова Т.В.** Вопросы согласования интересов в региональной иерархической модели сохранения природных ресурсов
- ✓ **Генкин А.Л.** Комплект алгоритмических и программных модулей для системы управления энергосберегающей технологией при горячей прокатке полос
  - ✓ **Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Адаптивное управление летательным аппаратом с идентификацией на скользящих режимах
  - ✓ **Корепанов В.О.** Имитационные модели тактического поведения агентов
  - ✓ **Крайванова В.А.** Модель естественно-языкового интерфейса для систем управления сложными техническими объектами и оценка эффективности алгоритмов на ее основе

