

ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ПРИЗНАКУ «СЛЕД»¹.

Ч. 1. Общая структура оптимальной поисковой траектории

Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно

Приведено решение плоскостной задачи об оптимизации траектории поисковой системы, осуществляющей обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след». Траектория состоит из участка поиска следа подвижного объекта (цели) и участка движения вдоль обнаруженного следа до момента встречи с целью. Задача решена в минимаксной постановке для случая, когда цель выбирает направление движения в пределах некоторого диапазона углов и на постоянной скорости движется по прямолинейной траектории

Ключевые слова: «след» объекта, оптимизация траектории поиска, минимаксное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей теории поиска является разработка методов поиска подвижного объекта по информационному признаку «след». Поиск подвижного объекта по следу обладает следующими особенностями:

— автономная поисковая система, снабженная средствами обнаружения следа, вначале находит след, а затем, перемещаясь вдоль него, находит объект поиска (цель);

— время существования следа ограничено.

Задача поиска по следу возникает в ряде практически важных случаев: при поиске групп людей в неблагоприятную погоду, кораблей по кильватерному следу, летательных аппаратов по косвенным признакам и др.

Существует обширная литература, посвященная поиску подвижных объектов (см., например, обзор [1] и библиографию к нему). Однако по вопросам построения траекторий поиска следа подвижного объекта авторам известны лишь две работы [2, 3]. Далее приводятся постановка и решение

кинематической задачи об оптимизации поиска подвижного объекта по информационному признаку «след» на плоскости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Два объекта, автономная поисковая система (преследователь) P и объект поиска (цель) E , обладающая ограниченными скоростями, перемещаются по плоскости; преследователь может в каждый момент произвольно изменять направление своего движения («простые движения» по терминологии работы [4]). За целью тянется след постоянной длины R .

На плоскости вводится неподвижная прямоугольная система координат XOY , начало которой совмещено с начальным положением преследователя P^0 , а ось OY проходит через начальное положение цели E^0 (рис. 1). Здесь и далее верхний индекс обозначает момент времени. Вводится двумерный вектор $z(t) \triangleq z = (x, y)$, направленный от преследователя P к цели E в момент времени t , $z(0) = z^0 = (0, D_0)$, D_0 — начальное расстояние между ними.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 29 Президиума РАН «Математическая теория управления».

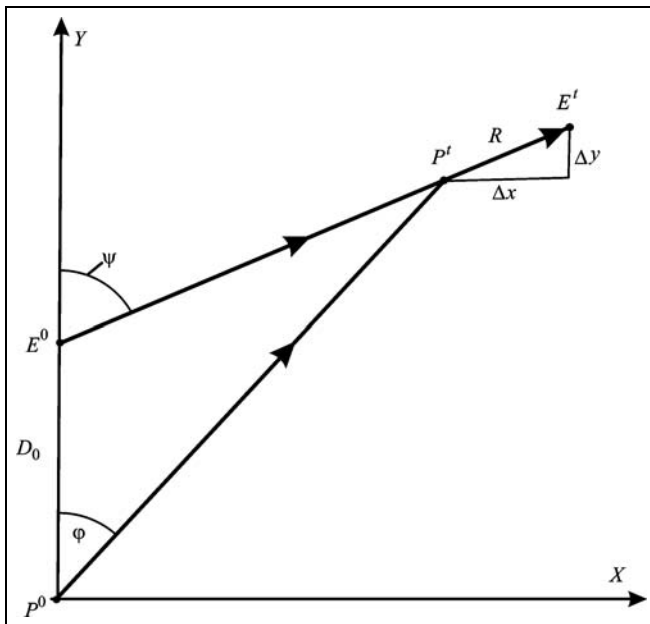


Рис. 1. Фрагмент прямолинейной поисковой траектории

В момент $t = 0$ цель выбирает направление движения ψ (угол между траекторией и осью OY) из диапазона углов $\Delta\Psi = [\psi_n, \psi_k]$, где ψ_n и ψ_k — начальная и конечная границы диапазона, соответственно, и движется по выбранному направлению с постоянной скоростью v_E . Углы отсчитываются от оси OY ; положительным считается отсчет по часовой стрелке. Далее символом (ψ) обозначается луч, исходящий из точки E^0 под углом ψ к оси OY ; символом $E(\psi)$ — цель, движущаяся вдоль луча (ψ) ; символом $E^t(\psi)$ — положение цели, движущейся вдоль луча (ψ) , в момент t ; символом $P^t = E^t(\psi)$ — событие, состоящее в совпадении позиций (точечной встрече) преследователя в произвольный момент t с целью, движущейся вдоль луча (ψ) .

Уравнение относительного движения объектов

$$\dot{z} = v_E(\sin\psi, \cos\psi) - u; \quad z(0) = z^0, \quad (1)$$

где u — двумерный вектор управления (скорости) преследователя, стесненный ограничением

$$\|u\| \leq v_p, \quad v_E < v_p. \quad (2)$$

Критерий оптимальности

$$T = \max_{\psi \in \Delta\Psi} (t_{\Pi} + t_d) \rightarrow \min_u, \quad (3)$$

где t_{Π} — момент обнаружения следа, совпадающий с моментом пересечения следа траекторией преследователя; t_d — время движения преследователя

вдоль следа до момента встречи с целью. Критерий имеет смысл максимальной, по диапазону углов $\Delta\Psi$, длительности интервала времени до встречи с целью. Длительность этого интервала минимизируется выбором программного управления преследователя, что отражается записью (3).

При любом $\psi \in \Delta\Psi$ в момент t_{Π} пересечения луча (ψ) траекторией преследователя должно выполняться условие

$$\langle e_z, e_v \rangle_{t_{\Pi}} = 1, \quad (4)$$

где e_z — единичный вектор, коллинеарный вектору $z(t_{\Pi})$, соединяющему позиции преследователя и цели в этот момент; e_v — единичный вектор, коллинеарный вектору скорости цели в неподвижной системе координат XOY в этот момент; символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ здесь и далее обозначается скалярное произведение векторов. Условие (4) имеет следующий физический смысл: пересечение траектории преследователя и произвольного луча (ψ) , вдоль которого движется цель, должно происходить в области возможного существования следа, т. е. точка пересечения должна располагаться между текущим положением цели на луче и начальной позицией E^0 . Принимается, что при точечной встрече преследователя и цели условие (4) выполняется.

Наряду с равенством (4), при каждом $\psi \in \Delta\Psi$ в момент t_{Π} пересечения луча должно выполняться неравенство

$$\|z(t_{\Pi})\| \leq R. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) определяют необходимые условия, которые должны выполняться при движении преследователя по поисковой траектории. В наличии двух фазовых ограничений — равенства (4) и неравенства (5) — состоит особенность решаемой задачи поиска. Эти ограничения определяют границы допустимой области положений цели в подвижной системе координат, связанной с преследователем.

Выбор функционала (3) в качестве критерия приводит к необходимости оптимизации поисковой траектории при наихудшем возможном, в смысле времени до встречи преследователя с целью, расположении следа. Поэтому задача (1)–(5) является задачей об оптимизации гарантированного результата. В статье [3] было показано, что эта задача сводится к задаче быстрого действия с критерием

$$T \rightarrow \min_u, \quad (6)$$



фазовыми ограничениями (4), (5) и терминальным условием

$$z^T(\psi_n) = 0. \quad (7)$$

В том частном случае, когда фазовое ограничение (5) реализуется в единственной точке поисковой траектории, оптимальной траекторией преследователя служит прямая, по которой он движется с максимальной скоростью v_p [3]. Решением задачи в этом случае является управление преследователя, гарантирующее точечную встречу с $E(\psi_n)$ — т. е. точечную встречу с целью в случае ее движения вдоль луча (ψ_n) .

В настоящей статье приводится решение об оптимизации поисковой траектории в задаче быстрого действия (1), (2), (4)–(7) для общего случая.

Параметры задачи: начальное расстояние D_0 , длина следа R , скорости объектов v_E и v_p , расположение начальной ψ_n и конечной ψ_k границ диапазона лучей — возможных направлений движения цели. Решение задачи находится для случая, когда цель движется в полуплоскости $x \geq 0$, $0 \leq \psi \leq \pi$.

Статья состоит из двух частей. В первой части устанавливается общая структура оптимальной поисковой траектории. Во второй части приводится решение задачи об оптимизации поисковой траектории для различных сочетаний параметров задачи.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПОИСКОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

До момента обнаружения цели траектория движения преследователя является программной — поиск осуществляется без поступления текущей информации о позиции цели. Так как задача (1), (2), (4)–(7) является задачей о быстродействии, а преследователь обладает простыми движениями, то по поисковой траектории преследователь движется с максимальной скоростью v_p .

Из общих результатов теории оптимального управления [5, 6] известно, что, при наличии ограничений в виде неравенств на функции фазовых координат, оптимальная программная траектория в фазовом пространстве состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные — внутри допустимой области. В статье [3] было показано, что в том случае, когда на траектории поиска равенство (4) выполняется, а равенство в соотношении (5) реализуется не более чем в единственной точке, оптимальной по быстродействию программной траекторией поиска в неподвижной системе координат является прямая.

В подвижной системе координат, связанной с преследователем, ей также соответствует прямая — траектория относительного движения цели.

В том случае, когда множество точек, в которых $\|z(t_n)\| - R = 0$, содержит не только изолированные точки, движению относительного положения цели по окружности (границе допустимой области в подвижной системе координат, связанной с преследователем) соответствует в неподвижной системе координат единственная поисковая траектория преследователя — логарифмическая спираль с плюсом в точке E_0 [7, 8], по которой преследователь движется таким образом, что радиальная составляющая его скорости совпадает со скоростью цели. Поэтому, в общем случае, оптимальная поисковая траектория преследователя состоит из прямолинейных отрезков и участков спирали, причем спиральные участки могут отсутствовать — см., например, статью [3]. Задача об оптимизации программного управления сводится к установлению характера движения преследователя на отдельных участках траектории и условий перехода от одного участка к другому.

Полное время движения по программной траектории складывается из времени собственно поиска следа в пределах сектора $\Delta\psi = [\psi_n, \psi_k]$ и времени сближения поисковой системы с границей сектора — лучом (ψ_k) .

Задача поиска имеет смысл при $D_0 > R$. Поэтому существует интервал времени $[0; t]$, в течение которого программная траектория прямолинейна. Назовем указанный участок программной траектории первым прямолинейным участком; этот участок включает в себя, в частности, траекторию сближения поисковой системы с лучом (ψ_k) . Двигаясь по прямой, соответствующей произвольному фиксированному углу φ , преследователь пересекает множество лучей (ψ) , $\psi \in \Delta\psi = [\psi_n, \psi_k]$; возможно, что это множество состоит из единственного луча (ψ_k) .

На прямолинейной поисковой траектории ограничению (4) соответствует в терминах направлений движений объектов равенство (см. рис. 1):

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)_{t_n} = \frac{v_E t_n \sin \psi - v_p t_n \sin \varphi}{D_0 + v_E t_n \cos \psi - v_p t_n \cos \varphi}.$$

Отсюда находится момент пересечения траектории преследователя и произвольного луча (ψ) :

$$t_n = \frac{D_0 \sin \psi}{v_p \sin(\psi - \varphi)}.$$

Расстояние, разделяющее позицию P и точку $E^t(\psi)$ в этот момент, вычисляется по формуле

$$D(t_n, \varphi, \psi) = D_0 \frac{|\beta \sin \psi - \sin \varphi|}{\sin(\psi - \varphi)}, \quad \beta = v_E/v_P.$$

Точечной встрече объектов, $D(t_n, \varphi, \psi) = 0$ соответствует равенство $\sin \varphi = \beta \sin \psi$.

Исследуем поведение функции $D(t_n, \varphi, \psi)$. Значения ψ_H и ψ_K являются координатами концов отрезка $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$ — множества направлений движения цели. Управление φ характеризует вид кривой $D(t_n, \varphi, \psi)$ на множестве $\Delta\Psi$. При фиксированном управлении φ

$$\max_{0 \leq \psi \leq \pi} D(t_n, \varphi, \psi) = D_0 |\cos \psi^*(\varphi)| \quad (8)$$

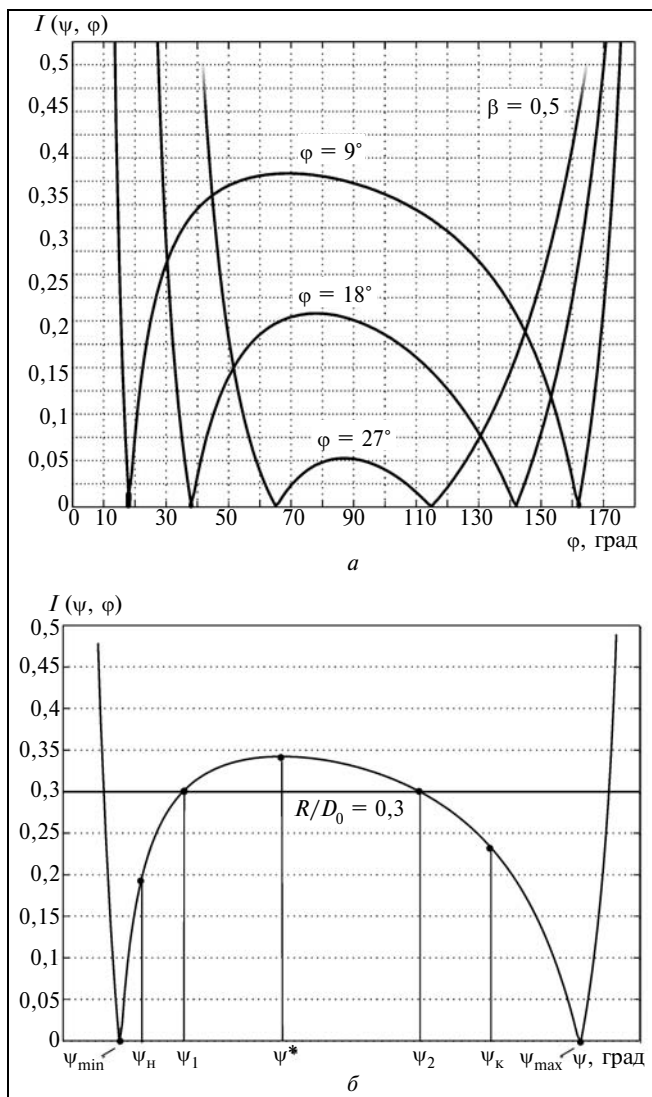


Рис. 2. Графики зависимости расстояния между объектами в момент пересечения следа

и достигается в единственной точке $\psi^* = \psi^*(\varphi)$:

$$\cos(\psi^* - \varphi) = \beta. \quad (9)$$

Возможны два случая, когда точка $\psi^*(\varphi)$ лежит:

— внутри отрезка $[\psi_H, \psi_K]$;

— вне этого отрезка; в этом случае максимум по ψ функции $D(t_n, \varphi, \psi)$ на множестве $\Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$ достигается в точке ψ_K .

На рис. 2, а изображено однопараметрическое семейство кривых

$$D(t_n, \varphi, \psi)/D_0 \triangleq I(\psi, \varphi) = \frac{|\beta \sin \psi - \sin \varphi|}{\sin(\psi - \varphi)},$$

построенных как функции ψ при фиксированных значениях параметра φ , указанных на рисунке; графики рассчитаны для значения $\beta = 0,5$.

На рис. 2, б изображена отдельно кривая, соответствующая $\varphi = 9^\circ$. Выделены горизонтальная прямая, соответствующая некоторому значению $D(t_n, \varphi, \psi) = R$, и ряд характерных точек, расположение которых зависит от управления φ :

$\psi_{\min}(\varphi)$, $\psi_{\max}(\varphi)$ — направления движения, на которых возможны точечные встречи цели и преследователя, траектория которого составляет угол φ с осью OY ;

$\psi_1(\varphi)$, $\psi_2(\varphi)$ — направления, на которых возможны R -встречи с целью;

$\psi^*(\varphi)$ — направление движения цели, соответствующее максимуму функции $D(t_n, \varphi, \psi)$ — см. формулу (9).

Точки, лежащие вне диапазона $[\psi_{\min}(\varphi), \psi_{\max}(\varphi)]$, соответствуют таким пересечениям траектории преследователя с лучами (ψ), при которых преследователь оказывается на луче впереди цели. При этом нарушается условие (4); при таких пересечениях $\langle e_z, e_v \rangle_{t_n} = -1$.

Рабочим является диапазон $[\psi_H, \psi_K]$ возможных направлений движений цели. Положение точек ψ_H и ψ_K фиксировано. Положения остальных точек зависят от выбора управления φ . Кривые на рис. 2, а иллюстрируют характер этих зависимостей. А именно, с ростом φ :

— диапазон углов $[\psi_{\min}(\varphi), \psi_{\max}(\varphi)]$ сужается; его левая и правая границы смещаются, соответственно, вправо и влево;

— то же происходит с диапазоном $[\psi_1(\varphi), \psi_2(\varphi)]$;

— значение максимума кривой $\psi^*(\varphi)$ уменьшается; точка максимума смещается вправо; положение этой точки предельное для концов обоих указанных диапазонов;

— диапазон $[\psi_2(\varphi), \psi_K]$ расширяется.



В силу ограничений (4) и (5) первый прямолинейный участок поисковой траектории может закончиться одним из следующих событий:

— выполнением терминального условия — точечной встречей $P^T = E^T(\psi_H)$;

— точечной встречей $P^T = E^T(\psi_K)$ в некоторый момент $0 < t < T$;

— R -встречей преследователя с точкой $E^t(\psi)$ в некоторый момент $0 < t < T$. Далее особо выделяются события, связанные с R -встречей преследователя с точкой $E^t(\psi_K)$ и с R -встречей преследователя с точкой $E^t(\psi^*)$, где $\psi^* \triangleq \psi^*(\varphi)$ — координата точки максимума функции $D(t_{\Pi}, \varphi, \psi)$. Управление φ , реализующее R -встречу с точкой $E^t(\psi^*)$, находится из условия

$$\max_{0 \leq \psi \leq \pi} D(t_{\Pi}, \varphi, \psi) = D_0 |\cos \psi^*(\varphi)| = R$$

и, в силу формул (8) и (9), имеет вид

$$\varphi^R = \arccos(R/D_0) - \arccos(v_E/v_P).$$

Перечисленным событиям соответствуют следующие направления движения преследователя на первом прямолинейном участке: $\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H)$; $\varphi_K = \arcsin(\beta \sin \psi_K)$ и $\varphi^R = \arccos(R/D_0) - \arccos(v_E/v_P)$.

Обозначим символом $\psi^*(\varphi_H) = \varphi_H + \gamma$, где $\cos \gamma = \beta = v_E/v_P$, то направление движения цели, которое соответствует максимальному расстоянию между объектами при управлении преследователя $\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H)$.

Структура поисковых траекторий зависит от взаимного расположения точек ψ_H , $\psi^*(\varphi)$ и ψ_K .

Возможны два варианта расположения точек $\psi^*(\varphi)$ и ψ_K :

$$\psi^*(\varphi_H) \leq \psi_K \text{ и } \psi_K < \psi^*(\varphi_H).$$

Кроме того, так как $\sin \varphi_H = \beta \sin \psi_H = \beta \sin(\pi - \psi_H)$, то возможны два варианта расположения граничных точек:

$$\psi_K \leq \pi - \psi_H; \quad \psi_K > \pi - \psi_H.$$

При $\psi_K > \pi - \psi_H$ прямолинейная поисковая траектория, соответствующая управлению $\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H)$, пересекает луч (φ_H) в области, где нарушается условие (4).

В статье [3] показано, что, при определенных соотношениях между параметрами (D^0 ; R ; v_E ; v_P ; ψ_H ; ψ_K), решением задачи является оптимальная

прямолинейная поисковая траектория. Она обеспечивает минимально возможное время движения преследователя до момента реализации терминального условия — точечной встречи $P^T = E^T(\psi_H)$; соответствующее управление преследователя $\varphi_H = \arcsin(\beta \sin \psi_H)$.

Достаточным условием существования оптимальной прямолинейной траектории является выполнение системы неравенств:

$$\psi_K \leq \pi - \psi_H, \quad (10)$$

$$\max_{\psi_H \leq \psi \leq \psi_K} D(t_{\Pi}, \varphi_H, \psi) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_H) \leq R, \quad (11)$$

имеющей следующий физический смысл:

— оптимальная прямолинейная траектория пересекает граничный луч (ψ_K) в той области, где существование следа возможно (неравенство (10));

— точка пересечения оптимальной прямолинейной траектории и произвольного луча (ψ) , $\psi \in \Delta \Psi = [\psi_H, \psi_K]$, находится в пределах следа, расположенного на луче (неравенства (10), (11)).

Если хотя бы одно из неравенств (10), (11) нарушается, то оптимальной прямолинейной поисковой траектории не существует. В фазовом пространстве первый прямолинейный участок поисковой траектории заканчивается выходом текущего положения цели на одно из ограничений (4), (5).

Пусть нарушается неравенство (10), а именно: $\psi_K > \pi - \psi_H$.

В этом случае направление движения преследователя на первом прямолинейном участке выбирается из условия пересечения луча (ψ_K) в точке, удовлетворяющей равенству (4). Таким направлением является, например, $\varphi_K = \arcsin(\beta \sin \psi_K)$. Так как $\varphi_H \neq \varphi_K$, то в точке пересечения происходит излом поисковой траектории. Обозначим символом $P(\psi_K)$ положение преследователя в момент пересечения траекторией луча (ψ_K) . В общем случае возможны следующие варианты:

— существует прямолинейная поисковая траектория, проходящая через точку $P(\psi_K)$ и терминальную точку $P^T = E^T(\psi_H)$;

— существует прямолинейная поисковая траектория, начинающаяся из точки $P(\psi_K)$ и заканчивающаяся реализацией второго ограничения — выходом текущего положения цели в фазовом пространстве в точку окружности

$$\|z(t_{\Pi})\| - R = 0. \quad (12)$$

Пусть теперь справедливо неравенство (10), но нарушается неравенство (11). Это означает, что

первый прямолинейный участок поисковой траектории, соответствующий направлению движения преследователя $\varphi = \varphi_H$, пересекает луч (ψ_K) в области, где существование следа возможно, но найдется луч (ψ) , $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_H, \psi_K]$, для которого

$$\max_{\psi} D(t_H, \varphi_H, \psi) = D_0 \cos \psi^*(\varphi_H) > R.$$

В этом случае первый прямолинейный участок поисковой траектории заканчивается выходом текущего положения цели на окружность (12).

Таким образом, в обоих случаях возможно существование участка поисковой траектории, которому в фазовом пространстве отвечает движение текущего положения цели по окружности (12). Соответствующей поисковой траекторией преследователя в неподвижной системе координат является логарифмическая спираль с полюсом в точке E^0 [7, 8], по которой преследователь движется таким образом, что радиальная составляющая его скорости совпадает со скоростью цели.

Далее излагается анализ фрагмента поисковой траектории, содержащей спиральный участок. При принятой в настоящей статье системе отсчета углов уравнение спирали имеет вид:

$$\rho_t = \rho_{\sigma} \exp[(\psi_{\sigma} - \psi_t) \text{ctg} \gamma]; \quad \cos \gamma = \beta = v_E/v_P, \quad (13)$$

где t — произвольный момент времени; символом ρ_t обозначена длина радиус-вектора в момент t ; $\sigma < t$ — момент выхода позиции преследователя на спиральный участок; ψ_t и ψ_{σ} — полярные углы; $\rho_{\sigma} = v_E \sigma - R$.

В каждой точке спирали (13) имеет место равенство $\psi = \varphi + \gamma$, где ψ — направление пересекаемого луча, φ — направление движения преследователя в точке пересечения.

Спираль (13) проходит через концы следов. Однако терминальным условием является точечная встреча $P^T = E^T(\psi_H)$. Следовательно, если оптимальная поисковая траектория содержит спиральный участок, то существует момент s схода текущей позиции преследователя со спирали на траекторию, проходящую через терминальную точку $P^T = E^T(\psi_H)$. Так как по поисковой траектории преследователь движется с постоянной скоростью, то время движения пропорционально длине траектории. Поэтому решаемая в настоящей статье задача сводится к задаче геодезического преследования на плоскости с выпуклым подвижным препятствием, где в качестве препятствия выступает огибающая семейства расширяющихся окружностей — геометрических мест концов следов, а терминальная точка принадлежит огибающей геомет-

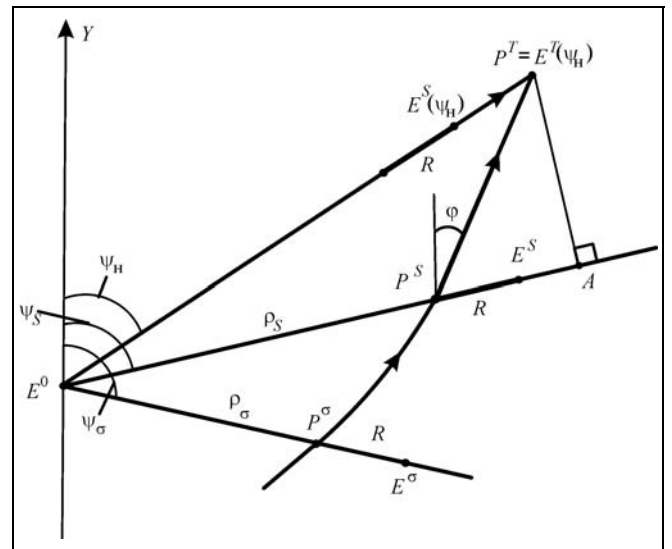


Рис. 3. Фрагмент многоветвистой поисковой траектории

рических мест позиций цели [9—13]. Таковыми огибающими являются логарифмические спирали. Из результатов работ [9, 13] следует, что в рассматриваемой задаче экстремаль состоит из части кривой — границы подвижного препятствия — и отрезков прямых, касательных к границе препятствия.

Назовем участок траектории после схода позиции преследователя со спирали заключительным прямолинейным участком поисковой траектории. На рис. 3 изображен фрагмент поисковой траектории, содержащий спиральный участок $P^{\sigma}P^S$ и заключительный прямолинейный участок $P^S P^T$; $t > s$. Здесь φ — направление движения преследователя на заключительном прямолинейном участке; ψ_{σ} и ψ_S — направления лучей, пересекаемых траекторией преследователя в моменты σ и s входа позиции преследователя на спираль и схода со спирали соответственно; E^{σ} и E^S — позиции цели на соответствующих лучах в указанные моменты времени; $E^S(\psi_H)$ и $E^T(\psi_H)$ — позиции цели на луче (ψ_H) в момент s схода преследователя со спирали и в момент T реализации точечной встречи $P^T = E^T(\psi_H)$ соответственно; P^{σ} , P^S и P^T — положения преследователя в моменты σ , s и T ;

$$\rho_s = v_E s - R. \quad (14)$$

Остальные обозначения совпадают с приведенными в тексте.

Запишем условие пересечения произвольного луча (ψ) и прямолинейной траектории преследователя после его схода со спирального участка. Так



как луч (ψ_S) и произвольный луч (ψ), $\psi_S > \psi$, исходят из одной точки E^0 и в момент s происходит R -встреча преследователя и точки $E^S(\psi_S)$, то удовлетворяющее ограничению (4) условие пересечения луча (ψ) в некоторый момент $t_{\Pi} > s$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)_{t_{\Pi}} = \\ &= \frac{v_E t_{\Pi} \sin \psi - (v_E s - R) \sin \psi_S - v_P \tau \sin \varphi}{v_E t_{\Pi} \cos \psi - (v_E s - R) \cos \psi_S - v_P \tau \cos \varphi}, \quad (15) \end{aligned}$$

где τ — длительность заключительного прямолинейного участка; φ — направление движения преследователя на этом участке. Из условия (15) находим:

$$\tau = \frac{(v_E s - R) \sin(\psi_S - \psi)}{v_P \sin(\psi - \varphi)}.$$

В случае движения цели вдоль луча (ψ), в момент $t_{\Pi} = s + \tau$ пересечения луча (ψ) траекторией преследователя объекты разделяет расстояние

$$\begin{aligned} D(t_{\Pi}, \varphi, \psi) &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \\ &= \left[v_E s + (v_E s - R) \frac{\beta \sin(\psi_S - \psi) - \sin(\psi_S - \varphi)}{\sin(\psi - \varphi)} \right]. \end{aligned}$$

Направление прямолинейного движения преследователя φ , реализующее точечную встречу $P^T = E^T(\psi_{\Pi})$, находится как корень уравнения $D(T, \varphi, \psi_{\Pi}) = 0$.

Перейдем к анализу заключительного прямолинейного участка поисковой траектории, $t > s$.

По теореме синусов для $\Delta E^0 P^S P^T$ (см. рис. 3):

$$\frac{\rho_S + R + v_E \tau}{\sin \gamma} = \frac{\rho_S}{\sin(\psi_{\Pi} - \varphi)} = \frac{v_P \tau}{\sin(\psi_S - \psi_{\Pi})}.$$

Из этой системы равенств находим величины:

$$\tau = \frac{R \sin(\psi_S - \psi_{\Pi})}{v_P \sin \gamma [1 - \cos(\psi_S - \psi_{\Pi})]}, \quad (16)$$

$$\rho_s = \frac{R \sin(\psi_{\Pi} - \psi_S + \gamma)}{\sin \gamma [(1 - \cos(\psi_S - \psi_{\Pi}))]}, \quad (17)$$

где ρ_s определяется формулой (14).

Равенство (16) допускает следующую геометрическую интерпретацию. Опустим из точки $P^T = E^T(\psi_{\Pi})$ перпендикуляр на луч (ψ_S), основание перпендикуляра — точка A . Образуются два пря-

моугольных треугольника: $\Delta E^0 P^T A$ и $\Delta P^S P^T A$ с общим катетом $P^T A$. Так как $\angle P^T P^S A = \psi_S - \varphi = \gamma$, то величина $v_P \tau \sin \gamma$ есть длина катета $P^T A$, а величина

$$\frac{v_P \tau \sin \gamma}{\sin(\psi_S - \psi_{\Pi})}$$

есть длина гипотенузы $\Delta E^0 P^T A$. Следовательно, величина

$$\frac{v_P \tau \sin \gamma [1 - \cos(\psi_S - \psi_{\Pi})]}{\sin(\psi_S - \psi_{\Pi})} = R$$

равна разнице длин гипотенузы $\Delta E^0 P^T A$ и катета $E^0 A$ этого же треугольника. С другой стороны,

$$\begin{aligned} E^0 P^T - E^0 A &= (\rho_S + R + v_E \tau) - (\rho_S + v_P \tau \cos \gamma) = \\ &= R + (v_E - v_P \cos \gamma) \tau = R \end{aligned}$$

при любых значениях τ .

Длительность интервала времени движения на спиральном участке поисковой траектории определяется соотношением [7]:

$$\tau_c = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma}}{v_P \operatorname{ctg} \gamma} (\rho_S - \rho_{\sigma}), \quad (18)$$

где σ и s — моменты, соответствующие началу и концу спирального участка.

Формула (16), определяющая длительность времени движения на прямолинейном участке, может быть переписана в более простом виде:

$$\tau = \frac{R}{v_P \sin \gamma} \operatorname{ctg} \frac{\psi_S - \psi_{\Pi}}{2}.$$

Выразим длительность τ через полярный радиус $\rho_S = v_E s - R$. Для этого перепишем соотношение (18) следующим образом:

$$\frac{\rho_S \sin \gamma}{R} = \frac{\sin(\psi_{\Pi} - \psi_S + \gamma)}{1 - \cos(\psi_S - \psi_{\Pi})} = \frac{1}{2} (x^2 - 1) - x \cos \gamma, \quad (19)$$

где $x = \operatorname{ctg} \frac{\psi_S - \psi_{\Pi}}{2}$, $\cos \gamma = \beta$.

Решение квадратного уравнения (19) имеет вид

$$x = \operatorname{ctg} \gamma + \sqrt{\sin^{-2} \gamma + 2 \rho_S R^{-1}}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) окончательно находим

$$\tau = \frac{R}{v_P \sin \gamma} (\operatorname{ctg} \gamma + \sqrt{\sin^{-2} \gamma + 2 \rho_S R^{-1}}).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведена постановка задачи об оптимизации траектории преследователя, осуществляющего обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след». Установлена общая структура программной поисковой траектории. Показано, что оптимальная программная поисковая траектория состоит из одного или нескольких прямолинейных участков и не более чем одного спирального участка. При этом спиральный участок может отсутствовать, а в том случае, когда спиральный участок имеется, он находится между прямолинейными участками траектории. Во второй части статьи будет приведено решение задачи об оптимизации поисковой траектории для произвольных начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benkoski S., Monticino M., Weisinger J.* A Survey of the Search Literature // *Naval Research Logistics*. — 1991. — Vol. 38, — N 3. — P. 469—494.
2. *Беланов Ю.А.* Аналитическая оценка производительности поиска кильватерного следа // *Вопросы оборонной техники*. — 1997. — Сер. 9. — Вып. 2 — 3. — С. 51—54.
3. *Кинематическая* задача поиска подвижного объекта по информационному признаку «след» / Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно // *Подводное морское оружие*. — 2008. — Вып. 12. — С. 95—102.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
5. *Брайсон, Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
6. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.

7. *Савелов А.А.* Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.
8. *Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю.* Игры поиска. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
9. *Вишневецкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // *Прикладная математика и механика*. — 1982. — Т. 46, вып. 4. — С. 613—620.
10. *Шевченко И.И.* Простейшая игра преследования на плоскости в позициях, разделенных препятствием // *Автоматика и телемеханика*. — 1989. — № 12. — С. 39—48.
11. *Collision Avoidance by a Ship with a Moving Obstacle: Computation of feasible Command Strategies / Y. Yavin, C. Frangos, T. Miloh, G. Zilman* // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 1997. — Vol. 93, N 1. — P. 53—66.
12. *Glizer Y.Y.* Optimal Planar Interception with Fixed End Conditions: Closed-Form Solution // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 1996. — Vol. 88, N 3. — P. 503—539.
13. *Hybrid Geodesics as Optimal Solutions to the Collision-Free Motion Planning Problem / J. Hu, M. Prandini, R. Johansson, S. Sastry* // *Lecture Notes in Computer Science*. — Berlin, Springer: 2001. — Vol. 2034. — P. 305—318.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Абрамянц Тамара Гургеновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-91-81, ✉abramnc@ipu.ru,

Беланов Юрий Арсеньевич — д-р техн. наук, пенсионер, работал в ЦНИИ автоматике и гидравлики, г. Москва,

Маслов Евгений Петрович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☎(495) 334-91-81, ✉maslovep@ipu.ru,

Яхно Виктор Павлович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-88-91,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

**Содержание сборника "Управление большими системами",
вып. 25, <http://ubs.mtas.ru/>**

- ✓ **Семьдесят** лет становления и развития отечественной науки управления: Институту проблем управления — 70 лет
- ✓ **Надеждин О.В., Заминова А.Р.** Анализ связности динамики нагнетательных и добывающих скважин
- ✓ **Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Адаптивная синхронизация нелинейных систем одного класса при ограниченной пропускной способности канала связи
- ✓ **Бурков В.Н., Цветков А.В., Сычев А.П.** Механизмы стимулирования сокращения сроков реализации проектов при линейных функциях затрат
- ✓ **Иващук О.А., Константинов И.С.** Обеспечение адаптивного управления экологической безопасностью промышленно-транспортного комплекса
- ✓ **Ильин В.Д.** Модель нормализованной экономики (НЭк-модель): основы концепции
- ✓ **Турганбаев Е.М., Козлова М.В.** Идентификация региональных индустриальных кластеров и оценка их структурного воздействия на экономику региона (на примере ВКО)
- ✓ **Курдюков А.П., Тимин В.Н.** Синтез робастного H_{∞} -регулятора для управления энергетической котельной установкой
- ✓ **Шнайдер Д.А.** Упреждающее управление по критерию энергетической эффективности в теплоэнергетических системах металлургического производства
- ✓ **Андрюченко А.Я., Тропова Е.И., Чадаев А.И.** Проблемы управления при выведении на орбиту крупногабаритных грузов
 - ✓ **Андреев А.К., Камаев Д.А., Трахтенгерц Э.А.** Экспертное прогнозирование последствий повреждения систем жизнеобеспечения
 - ✓ **Шаповалов А.А.** Использование беспроводных сетей стандарта IEEE 802.16 (WiMAX) для построения канала передачи информации в системах управления безопасностью мореплавания

