УДК 519.865.7; 330.46

ЦИКЛИЧЕСКИЙ РОСТ В МОДЕЛИ ЗАМКНУТОЙ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЭКОНОМИКИ[1]

А.П. Абрамов

Рассмотрена динамическая модель замкнутой децентрализованной экономики с леонтьевскими технологиями. Выписаны условия, при которых последовательность нормированных выпусков экономической системы либо сходится, либо совершает предельный цикл обхода конечного числа точек, при этом как предел, так и предельные точки определяются технологиями системы и схемой принятия управленческих решений.

Ключевые слова: децентрализованная экономика, циклический рост, леонтьевские технологии.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория сбалансированного роста — важный раздел экономической динамики, в котором получен ряд фундаментальных результатов (см. монографии [1—5]). В ее основе лежат модели экономики с централизованным управлением и постоянным темпом роста всех показателей. Потребность в теоретическом анализе более сложной экономической динамики обусловила ряд публикаций как по нелинейным экономическим системам [6—8]), так и по сбалансированному росту в классических моделях, но с децентрализованным управлением. Этапной работой второго из названных направлений стала статья [9], в которой «обычная» гейловская теория объединена с моделью равновесия Вальраса. Авторы доказали, что при определенных условиях в данной модели существует луч стационарного роста. Другой подход в этом направлении предложен в работах [10, 11], где исследована схема перехода к сбалансированному росту в модели децентрализованной экономики, основанная на учете натуральных показателей. Рассматриваемая далее модель представляет собой новый этап развития данного подхода. Конкретно, изучается цикличность некоторых экономических показателей, которая является следствием децентрализованного принятия управленческих решений в модели экономики с леонтьевскими технологиями.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-07-00286).

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим замкнутую динамическую модель производства и товарообмена леонтьевского типа, в которой фигурируют n монопродуктовых отраслей и каждый из видов продукции производится только одной отраслью. Состояние экономической системы отслеживается в дискретные моменты времени, которые обозначаются индексом t, $t = 1, 2, ...$ Шаги модели, т. е. промежутки времени между соседними моментами, будем помечать тем же индексом t, причем номер шага соответствует правой границе. Длительности всех шагов предполагаются одинаковыми и равными одному производственному циклу во всех отраслях, время на товарообмен между отраслями считается пренебрежимо малым. Продукция, произведенная на некотором шаге, должна быть использована до окончания следующего шага, а неиспользованные остатки считаются непригодными для потребления на последующих шагах.

Введем следующие обозначения:

$i = 1, ..., n$ — индекс отрасли;

N_i^+ — подмножество отраслей, поставляющих продукцию в отрасль i;

N_i^- — подмножество отраслей, потребляющих продукцию отрасли i;

$x_i(t)$ — объем выпуска продукции отраслью i на шаге t;

$x_{ji}(t)$ — объем ресурса вида j, $j \in N_i^+$, которым располагает отрасль i в начале шага t.

Предполагается, что $N_i^+ \neq \varnothing \neq N_i^-$, $i = 1, ..., n$, а производственная функция отрасли i имеет вид

$$x_i(t) = \min_{j \in N_i^+} \left\{ \frac{y_{ji}(t)}{y_{ji}^0} \right\}, \quad i = 1, ..., n,$$

где $y_{ji}^0 > 0$ — минимально необходимое количество продукта вида j, которое требуется для производства одной единицы продукции вида i. Эту функцию называют производственной функцией Леонтьева или производственной функцией с фиксированными пропорциями факторов [12, 13].

В случае (нетривиального) режима функционирования системы, при котором каждая отрасль i на любом шаге t полностью распределяет продукцию, произведенную на этом шаге, а ресурсы затрачиваются в минимально необходимых объемах, имеем уравнение вида

$$x(t) = Yx(t + 1), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $x(t + 1)$ — вектор-столбцы, а элементы $\bar{y}_{ij}$ квадратной матрицы Y порядка n, называемой технологической, определены так:

$$\bar{y}_{ij} = \begin{cases} y_{ij}^0, i \in N_j^+; \\ 0, i \notin N_j^+. \end{cases}$$

Применение индукции к динамическому уравнению (1) позволяет записать его как $x(0) = Y^t x(t)$, $t = 1, 2, ...$, где $x(0)$ — вектор начальных запасов продукции.

Замечание 1. Если допустить возможность перепроизводства, то формула (1) примет вид $x(t) \geq Yx(t + 1)$, что соответствует динамической модели Леонтьева — частного случая модели фон Неймана [14]. ♦

Если матрица Y примитивна, то экономическая система может функционировать в режиме (1) при всех $t \geq 1$ тогда и только тогда, когда $x(0)$ является фробениусовым вектором этой матрицы [3]. В этом режиме, который называется магистральным [15], все отрасли имеют одинаковый постоянный темп роста выпуска продукции, равный $\gamma \equiv 1/\lambda_Y$, где λ_Y — фробениусово число матрицы Y. Всюду ниже будем предполагать, что $\gamma > 1$, так как при $\gamma \leq 1$ экономическая система не представляет интереса по очевидным причинам.

2. СХЕМА ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ РАБОТЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Легко видеть, что децентрализованная экономическая система может функционировать в режиме магистрали. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

— вектор начальных запасов $x(0)$ должен быть фробениусовым вектором матрицы Y;

— обмен начальными запасами между отраслями должен обеспечить воспроизводство этого вектора в масштабе γ на первом шаге работы системы;

— всем отраслям должен быть известен показатель γ — темп роста на магистрали, в соответствии с которым они увеличивают поставки своей продукции отраслям-потребителям на всех последующих шагах.

Выполнение на практике всех этих условий представляется маловероятным. Кроме того, любые сбои в работе системы (отклонения объемов выпуска от плановых из-за технологических проблем или задержек в поставках) сразу уводят систему с магистрали, что вызывает проблему распределения продукции, так как нельзя применить стандартное правило «увеличивай поставки всем потребителям в γ раз». Поэтому интересно рассмотреть схемы функционирования системы, которые обладают следующими свойствами:

— не требуют директивного управления;

— могут вырабатывать управленческие решения вне магистрального режима и при этом не уводят систему с магистрали, если она работает в этом режиме;

— имеют ясное экономическое обоснование.

Описывая работу децентрализованной экономики, введем дополнительные переменные для отрасли i:

$x_i^p(t)$ — план выпуска на шаге t, определяемый отраслью в момент окончания шага $t - 1$;

$x_i^d(t - 1)$ — суммарный спрос потребителей на продукцию шага $t - 1$;

$x_i^s(t)$ — объем реализации продукции, произведенной на шаге t.

Переменные $x_i^d(t - 1)$ и $x_j^p(t)$, $j \in N_i^-$ связаны так:

$$x_i^d(t - 1) = \sum_{j \in N_i^-} y_{ij}^0 x_j^p(t), \quad i = 1, ..., n. \tag{2}$$

Будем считать, что план выпуска любой отрасли на шаге t определяется объемом реализованной продукции, произведенной на шаге $t - 2$. Конкретно, предположим что отрасль i, планируя выпуск, руководствуется шкалой реализации произведенной продукции, содержащая $L(i)$ диапазонов. Например, при $L(i) = 5$ градация может быть такой: уровень $l = 1$ отвечает случаю, когда реализовано не более 60 % произведенной продукции, уровень реализации $l = 2$ соответствует диапазону (60 %, 70 %], ..., уровень $l = 5$ — диапазону (90 %, 100 %]. Соответственно, определяя план выпуска на шаге t, отрасль i использует формулу

$$x_i^p(t) = k_{il} x_i^s(t-2), \quad t \ge 2, \quad i = 1, ..., n, \qquad (3)$$

где положительный коэффициент k_{il} один и тот же в отрасли i для всех t, при реализации продукции, произведенной на шаге $t - 2$, в диапазоне l. Предполагается, что при любом фиксированном i коэффициенты $\{k_{il}\}$ упорядочены так: $k_{i1} < k_{i2} < ... < k_{iL(i)}$.

Замечание 2. Значение коэффициента k_{il} для диапазона по сбыту l отрасли i означает, что данная отрасль ожидает темпа роста потребления своей продукции на уровне $\sqrt{k_{il}}$ в расчете на один шаг. ♦

Далее определяются объемы поставок. Отрасль i, получив заявки от потребителей, вычисляет коэффициент

$$\eta_i(t-1) = x_i^d(t-1)/x_i(t-1), \quad i = 1, ..., n,$$

характеризующий обеспеченность планов ресурсом, который она произвела. Эти коэффициенты сообщаются всем отраслям системы, после чего каждая из отраслей (или некий информационный центр) определяет максимальное значение данных показателей:

$$\eta_{\max}(t-1) = \max_i \eta_i(t-1).$$

Если окажется, что $\eta_{\max}(t-1) \le 1$, то спрос каждой из отраслей на ресурсы, произведенные на шаге $t - 1$, удовлетворяется полностью, и объемы поставок обеспечивают выполнение намеченных планов:

$$y_{ij}(t) = y_{ij}^0 x_j^p(t), \quad i = 1, ..., n; \quad j \in N_i^- .$$

В этом случае объемы производства равны планам: $x_i(t) = x_i^p(t)$. При $\eta_{\max}(t-1) > 1$ выполнение всех планов невозможно, и отрасли уменьшают их:

$$x_i^p(t) := x_i^p(t)/\eta_{\max}(t-1), \quad i = 1, ..., n. \qquad (4)$$

Соответственно, объем спроса на все ресурсы также уменьшается в $\eta_{\max}(t-1)$ раз. Ясно, что скорректированные планы полностью обеспечены ресурсами. Таким образом, здесь вектор выпуска $x(t)$ связан с первоначальным планом (3) равенством вида $x(t) = x^p(t)/\eta_{\max}(t-1)$.

Замечание 3. Корректировка (4) означает, что планы пересчитываются по наиболее дефицитному ресурсу, и этот ресурс распределяется пропорционально размерам спроса. Тем самым в модели ни одна из отраслей не имеет привилегий по ресурсному обеспечению.

План, допустимый по ресурсам, однозначно определяет объемы реализации продукции, произведенной на завершившемся шаге:

$$x_i^s(t-1) = \sum_{j \in N_i^-} y_{ij}^0 x_j^p(t), \quad i = 1, ..., n.$$

Далее начинается производственный цикл на шаге t, объемы выпусков которого формируют вектор $x(t)$, после чего по формуле (3) определяется вектор $x^p(t + 1)$ и т. д. Таким образом, для работы данной схемы, наряду с вектором начальных запасов $x(0)$, должен быть задан вектор $x^p(1)$ — план работ на первом шаге, а также наборы коэффициентов $\{k_{il}\}$ со шкалами их применения.

Теорема. *Если технологическая матрица Y неразложима, векторы $x(0)$ и $x^p(1)$ строго положительны и выполняется неравенство*

$$k_{\min} \triangleq \min_i k_{i1} \ge \gamma^2, \qquad (5)$$

то данная схема работы экономической системы либо приводит к сходимости последовательности нормированных выпусков, либо эта последовательность имеет конечное число предельных точек. В последнем случае, выбирая окрестности этих точек сколь угодно малыми, можно указать номер шага, начиная с которого все члены последовательности будут принадлежать им циклически. ♦

Доказательство теоремы см. в Приложении.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

Для случая примитивной технологической матрицы Y укажем вид предельных точек.

Пусть m обозначает их число. Согласно теореме, начиная с некоторого шага T, для планирования циклически используются m фиксированных наборов коэффициентов из множества $\{k_{il}\}$. Обозначим через K_j, $j = 0, ..., m - 1$, диагональную матрицу, ненулевые элементы которой отвечают набору коэффициентов k_{il}, фигурирующих на шаге j указанного цикла. В общем случае, аналогичную матрицу, диагональные элементы которой использовались при вычислении планов на шаге t, обозначим через $K(t)$, $t \ge 2$. Введем параметр $\beta(t)$, показывающий, какая доля от первоначальных планов реализуется на шаге t.

Ясно, что

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, & \eta_{\max}(t-1) \le 1; \\ 1/\eta_{\max}(t-1), & \eta_{\max}(t-1) > 1. \end{cases}$$

Тогда для любого шага t имеем: $x(t) = \beta(t)x^p(t)$. Соответственно, объем потребления продукции, произведенной на шаге $t - 1$, составит $x^s(t-1) = Yx(t) = \beta(t)Yx^p(t)$.

Индукция позволяет установить связь между векторами $x(t)$ и $x^p(1)$:

$$x(t) = \beta(t)\beta(t-1)...\beta(1)K(t)YK(t-1)Y...K(2)Yx^p(1).$$

Используя эту формулу и введенные обозначения для m матриц цикла, выпишем зависимость вектора $x(t)$ от вектора $x(T)$ при $t = T + ms + j > T$, $s = 0, 1, 2, ...$:

$$x(T + ms + j) = \\ = \begin{cases} \beta(t)...\beta(T+1)(K_{m-1}YK_{m-2}Y...K_0Y)^s, \ j = 0; \\ \beta(t)...\beta(T+1)K_{j-1}Y...K_0Y\times \\ \times(K_{m-1}YK_{m-2}Y...K_0Y)^s x(T), \ j > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через λ_0 фробениусово число матрицы $M_0 \equiv K_{m-1}YK_{m-2}Y...K_0Y$. Тогда для шагов t, отвечающих значению индекса $j = 0$ в формуле (6), имеем

$$x(T + ms) = \beta(T + ms)...\beta(T + 1)\lambda_0^s\left(\frac{M_0}{\lambda_0}\right)^s x(T), \quad (7)$$

Поскольку степень примитивной матрицы также примитивна [16], а нули в матрицах Y и K_jY, $j = 0, ..., m - 1$, расположены одинаково, то примитивна и матрица M_0. Это означает сходимость последовательности $\{(M_0/\lambda_0)^s x(T)\}$ к фробениусову вектору матрицы M_0 при $s \to \infty$ [17], а соответствующей подпоследовательности нормированных выпусков $\{x(\tau)/\|x(\tau)\}$ — к нормированному фробениусову вектору v_0 матрицы M_0. Из циклического порядка множителей $K_jY...K_0Y$ во второй строке формулы (6) следует, что последовательность нормированных выпусков $\{x(\tau)/\|x(\tau)\|\}$ при $t \to \infty$ будет циклически стремиться к m точкам на сфере единичного радиуса, которые однозначно определяются векторами вида v_0, K_0Yv_0, $K_1YK_0Yv_0$, $K_{m-2}Y...K_1YK_0Yv_0$.

Если $m = 1$, то последовательность нормированных выпусков сходится к точке на единичной сфере, определяемой фробениусовым вектором матрицы $M_0 = K_0Y$. В частном случае, когда все диагональные элементы матрицы K_0 имеют одинаковое значение k, равенство (7) может быть записано так:

$$x(T + s) = \beta(T + s)...\beta(T + 1)(k\lambda_Y)^s\left(\frac{Y}{\lambda_Y}\right)^s x(T),$$

и последовательность нормированных выпусков сходится к фробениусову вектору матрицы Y. В этом случае имеет место асимптотический выход на режим магистрали [10, 11].

Заметим, что указанная сходимость и асимптотическое стремление к циклическому обходу предельных точек могут носить тривиальный характер. Например, экономическая система будет функционировать в режиме магистрали начиная с первого шага, если векторы начальных условий $x(0)$, $x^p(1)$ являются фробениусовыми, $x^p(1) > \gamma x(0)$ и все отрасли используют одну и ту же шкалу для оценки уровня реализации продукции.

4. КРИТЕРИЙ РОСТА ПРОИЗВОДСТВА

Определим условия, при которых данная схема функционирования обеспечивает системе экономический рост при $t > T$. Для упрощения формул сместим точку отсчета времени так, чтобы $T = 0$. Из соотношения (6) получаем, что векторы $x(m(s + 1))$ и $x(ms)$, отвечающие параметру $j = 0$ при $t \geq 0$, связаны так:

$$x(m(s + 1)) = \beta(ms + m)...\beta(ms + 1)M_0x(ms). \quad (8)$$

Ясно, что при соответствующем выборе новой точки отсчета можно добиться сколь угодно точного выполнения равенства

$$M_0x(ms) = \lambda_0x(ms). \quad (9)$$

По предположению, выпуск на каждом шаге ограничен объемами производства, поэтому скалярный множитель $\beta(ms + j)$, $j = 1, ..., m$, в правой части формулы (8) выглядит так:

$$\beta(ms + j) = \min_i \frac{x_i(ms+j-1)}{x_i^d(ms+j-1)} = \\ = \min_i \frac{x_i(ms+j-1)}{[YK(ms+j)Yx(ms+j-1)]_i}. \quad (10)$$

Известно [16], что фробениусовы числа матриц вида $M_j \equiv K_{j-1}Y...K_0YK_{m-1}Y...K_jY$, $j = 1, ..., m - 1$, равны λ_0. Подставляя в формулу (10) выражение (6) вектора $x(ms + j - 1)$ при $T = 0$, получаем

$$\beta(ms + j) = \min_i \frac{[M_j^s x(0)]_i}{[YM_{j+1}^s x(0)]_i} = \\ = \min_i \frac{[(M_j/\lambda_0)^s x(0)]_i}{[Y(M_{j+1}/\lambda_0)^s x(0)]_i}, \quad j = 1, ..., m - 1,$$

откуда следует, что при достаточно больших s сколь угодно точно выполняются равенства вида

$$\beta(ms + j) = \begin{cases} \min_i \frac{\alpha_j v_i(j)}{\alpha_{j+1}[Yv(j+1)]_i}, \ j = 1, ..., m-2; \\ \min_i \frac{\alpha_j v_i(j)}{\lambda_0\alpha_0[Yv(0)]_i}, \ j = m-1, \end{cases}$$

где через $v(j)$ обозначен фробениусов вектор с единичной нормой матрицы M_j, а α_j — положительный скаляр, соизмеряющий нормы векторов $v(j)$ и $x(0)$. Таким образом, для произведения скалярных множителей в правой части формулы (8) можно добиться сколь угодно точного выполнения равенства

$$\beta(ms + m)...\beta(ms + 1) =$$
$$= \min_i \frac{\alpha_0 v_i(0)}{\alpha_1[Yv(1)]_i} \min_i \frac{\alpha_1 v_i(1)}{\alpha_2[Yv(2)]_i} ...$$
$$... \min_i \frac{\alpha_{m-2} v_i(m-2)}{\alpha_{m-1}[Yv(m-1)]_i} \min_i \frac{\alpha_{m-1} v_i(m-1)}{\alpha_0[Yv(0)]_i} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0} \min_i \frac{v_i(0)}{[Yv(1)]_i} \min_i \frac{v_i(1)}{[Yv(2)]_i} ...$$
$$... \min_i \frac{v_i(m-2)}{[Yv(m-1)]_i} \min_i \frac{v_i(m-1)}{[Yv(0)]_i}. \qquad (11)$$

Сравнение формул (8), (9) и (11) показывает, что при достаточно больших значениях параметра s для выполнения неравенства $x(sm + m) > x(sm)$ необходимо и достаточно, чтобы показатель

$$C \equiv \min_i \frac{v_i(0)}{[Yv(1)]_i} \min_i \frac{v_i(1)}{[Yv(2)]_i} ... \min_i \frac{v_i(m-1)}{[Yv(0)]_i} \qquad (12)$$

был больше единицы. Поскольку в правой части этого выражения все собственные векторы фигурирует по разу в числителе и в знаменателе, то корректна следующая процедура последовательного изменения норм векторов $v(1)$, $v(2)$, ..., $v(m - 1)$: при фиксированном векторе $v(0)$ изменим норму вектора $v(1)$ так, чтобы первый сомножитель в правой части формулы (12) обратился в единицу, далее исходя из модифицированного вектора $\tilde{v}(1)$, изменим норму вектора $v(2)$ так, чтобы в единицу обратился второй сомножитель и т. д. После окончания перенормировки показатель C примет вид

$$C = \min_i \frac{\tilde{v}_i(m-1)}{[Yv(0)]_i}, \qquad (13)$$

где $\tilde{v}(m - 1)$ — модифицированный фробениусов вектор матрицы M_{m-1}.

С экономической точки зрения процедура коррекции норм векторов означает, что при заданном фробениусовом векторе $v(0)$ матрицы M_0, на шаге j, $j = 1, ..., m - 1$, цикла реализуется вектор выпуска, который является фробениусовым вектором матрицы M_j с максимально возможным модулем, допускаемым наличными ресурсами. Таким образом, из формулы (13) следует, что в асимптотике *рост выпуска за цикл будет происходить тогда и только тогда, когда вектор выпуска на последнем шаге цикла строго больше затрат на производство исходного вектора цикла* $v(0)$.

Легко видеть, что этот результат, полученный с начальной матрицей цикла K_0, справедлив и при начале цикла с любой другой матрицей K_j, $j = 1, ..., m - 1$. Более того, рассматривая рост за период, начинающийся с любой из матриц K_j, видим, что при достаточно большом s для темпа роста получаем то же самое выражение (13). Тем самым в асимптотике темпы роста выпуска за любые последовательные m шагов оказываются одинаковыми.

С другой стороны, выпишем достаточное условие уменьшения объемов производства, в котором присутствует фробениусово число λ_Y технологической матрицы Y. Рассмотрим произведение параметров $\beta(ms + m)...\beta(ms + 1)\lambda_0$, фигурирующих в формулах (8) и (9). Представление (10) коэффициента $\beta(ms + j)$ позволяет оценить его так:

$$\beta(ms + j) \le \min_i \frac{x_i(ms + j - 1)}{k_{\min}[Y^2 x(ms + j - 1)]_i} \le$$
$$\le \frac{1}{k_{\min}\rho(Y^2)} = \frac{1}{k_{\min}\lambda_Y^2}, \quad j = 1, ..., m,$$

где использовалось неравенство (П1). Таким образом,

$$\beta(ms + m)...\beta(ms + 1)\lambda_0 \le \lambda_0 \left(\frac{1}{k_{\min}\lambda_Y^2}\right)^m,$$

и если правая часть этого неравенства меньше единицы, то в асимптотике $x(m(s + 1)) < x(ms)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная модель показывает теоретическую возможность асимптотического выхода многосекторной децентрализованной экономики на режим циклического функционирования с повторяющимися наборами дефицитных и избыточных продуктов. Если все отрасли будут планировать свою работу, используя единое значение оценки темпа роста, пусть даже завышенное по сравнению с темпом роста на магистрали, экономическая система асимптотически выйдет на режим сбалансированного роста. Отметим, что данная децентрализованная схема управления требует определенной координации при составлении планов работ отраслей. Эта координация необходима при корректировке планов в соответствии с наличными ресурсами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность нормированных векторов выпуска $\{x(t)/\|x(t)/\|\}$. Точки этой последовательности принадлежат компактному множеству, поэтому она содержит подпоследовательность $\{x(\tau)/\|x(\tau)/\|\}$, сходящуюся к некоторой точке a сферы единичного радиуса. Ясно, что соответствующая подпоследовательность нормированных векторов реализованной продукции $\{x^s(\tau - 1)/\|x^s(\tau - 1)\|\}$ сходится к вектору вида $Ya/\|Ya$. В силу того, что набор коэффициентов $\{k_{il}\}$, фигурирующих при вычислении планов в формуле (3), конечен, то при любом $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа $\tau(\varepsilon)$ и $m(\varepsilon)$ такие, что выполняются два условия:

— члены $x(\tau(\varepsilon))/\|x(\tau(\varepsilon))\|$ и $x(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon))/\|x(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon))\|$ указанной подпоследовательности нормированных выпусков принадлежат ε-окрестности точки a;

— составляя план работы для шага $\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 1$ каждая из отраслей системы использует тот же коэффициент k_{il}, который фигурировал в ее плане работ для шага $\tau(\varepsilon) + 1$.

В этом случае, выбирая параметр ε достаточно малым, можно добиться сколь угодно точного совпадения значений нормированных планов на шагах $\tau(\varepsilon) + 1$ и $\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 1$, а значит, и сколь угодно точного равенства показателей $x(\tau(\varepsilon) + 1)/\|x(\tau(\varepsilon) + 1)\|$ и $x(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 1)/\|x(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 1)$. Следовательно, можно добиться и сколь угодно точного равенства нормированных векторов поставок $x^s(\tau(\varepsilon))/\|x^s(\tau(\varepsilon))\|$ и $x^s(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon))/\|x^s(\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon))\|$.

Покажем, что в этом случае любая отрасль будет использовать одинаковые значения коэффициентов k_{il} при планировании выпусков на шагах $\tau(\varepsilon) + 2$ и $\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 2$. Для этого сначала докажем, что при выполнении условия (5) выпуск на каждом шаге ограничен объемом производства предыдущего шага, а не первоначальным планом. Действительно, формулы (2) и (3) позволяют оценить снизу вектор спроса так: $x^d(t) \geq k_{\min} Y^2 x(t)$. Известно [16], что для фробениусова числа $\rho(B)$ любой неотрицательной матрицы B порядка n и любого положительного вектора $z \in R^n$ выполняется неравенство

$$\rho(B) \leq \max_i \frac{1}{z_i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j. \qquad (\Pi 1)$$

Из него следует, что для некоторой отрасли j должно выполняться неравенство $[Y^2 x(t)]_j \geq \rho(Y^2) x_j(t)$, где $\rho(Y^2) = \gamma^{-2}$ — фробениусово число матрицы Y^2. Эти две оценки показывают, что по крайней мере для одной отрасли объем спроса должен быть не меньше объема предложения: $x_j^d(t) \geq x_j(t)$.

Таким образом, при одинаковых пропорциях сбыта продукции, произведенной на шагах $\tau(\varepsilon)$ и $\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon)$ и одинаковых пропорциях выпуска на этих же шагах, имеем совпадающие множества продуктов, определяющих коэффициент коррекции первоначальных планов. Это означает, что у каждой отрасли показатели реализации продукции на указанных шагах принадлежат одному и тому же диапазону. Далее проводим аналогичный анализ показателей для пары шагов $\tau(\varepsilon) + 2$ и $\tau(\varepsilon) + m(\varepsilon) + 2$ и т. д.

Пусть индекс j принимает значения $0, 1, ..., m - 1$. Из доказанного следует, что выбрав шаг T достаточно большим, можно получить при фиксированном j сколь угодно точное равенство нормированных векторов выпуска вида $x(T + ms + j)/\|x(T + ms + j)\|$ при $s = 0, 1, 2, ...$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 420 с.
2. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост (многоотраслевой анализ). — М.: Наука, 1972. — 280 с.
3. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — 520 с.
4. *Ланкастер К.* Математическая экономика. — М.: Сов. радио, 1972. — 464 с.
5. *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973. — 336 с.
6. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999. — 335 с.
7. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. — Ижевск: ИД «Удмуртский университет», 2000. — 200 с.
8. *Петров Л.Ф.* Методы динамического анализа экономики. — М.: Инфра-М, 2010. — 239 с.
9. *Беленький В.З., Сластников А.Д.* Равновесная динамика замкнутого рынка монопродуктовых производств // Экономика и математические методы. — 1994. — Т. 30, № 4. — С. 112—128.
10. *Абрамов А.П.* О выходе на магистраль сбалансированного роста в модели замкнутой децентрализованной экономики // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 3—12.
11. *Абрамов А.П.* Сбалансированный рост в моделях децентрализованной экономики. — М.: Книжный дом Либроком, 2011. — 128 с.
12. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979. — 304 с.
13. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 240 с.
14. *Гейл Д.* Замкнутая линейная модель производства // Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — С. 382—400.
15. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1985. — 240 с.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
17. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 294 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Абрамов Александр Петрович — д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотрудник, Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва,
☎ (499) 135-00-80, ✉ apabra@ccas.ru.