

# СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С КОММУТАЦИЕЙ КАНАЛОВ

Э.Ю. Абдуллина, В.Н. Ефанов

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза систем управления подвижными объектами с коммутацией каналов управления. Для устранения скачков и импульсов, которые могут появляться в моменты переключения, предложено использовать обобщенную характеристику, позволяющую описать весь ансамбль траекторий движения системы при переключении каналов управления в произвольный, случайный момент времени. Разработан способ численного обращения преобразования Лапласа на основе разложения дельта-функции в ряд экспоненциальных полиномов, что позволило обеспечить приближение обобщенной характеристики системы к заданной временной области. Доказано, что описание обобщенной характеристики системы в виде экспоненциального ряда позволяет свести задачу синтеза к решению системы алгебраических неравенств. На конкретном примере синтеза системы автоматического управления углом тангажа летательного аппарата с ограничением нормальной перегрузки показано, что вся совокупность траекторий движения, полученная для различных моментов переключения каналов, принадлежит заданной временной области.

**Ключевые слова:** синтез, переключаемые системы, селектор, подвижный объект, траектория движения, угол атаки.

## ВВЕДЕНИЕ

Системы управления подвижными объектами имеют ряд характерных особенностей [1, 2]. Одной из таких особенностей является многорежимный характер их работы. При этом переход на очередной режим работы сопровождается изменением структуры управляющей части системы. В частности, такая ситуация возникает, когда в процессе управления движением объекта по заданной программе появляется необходимость обеспечить ограничение предельно допустимых значений параметров движения, например, ограничение предельного значения угла атаки при управлении угловым положением летательного аппарата. Поскольку в процессе функционирования происходит изменение структуры системы в соответствии с принятой логикой переключения каналов, такие системы относятся к коммутируемым или переключаемым системам [3–10]. Это класс многорежимных динамических систем, состоящих из семейства непрерывных подсистем и устройства, которое управляет переключениями режимов.

Постоянно возрастающий интерес к исследованию систем с переключаемой структурой обусловлен не только их широким использованием в прикладных задачах управления электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами и во многих других областях, вплоть до создания интеллектуальных компонентов систем управления [11–17], но и рядом интересных явлений, которые обнаруживаются в таких системах. Известны примеры, которые показывают, что обеспечения устойчивости всех отдельных режимов недостаточно для устойчивости системы с произвольными переключениями [18–21]. Это означает, что устойчивость систем с переключениями зависит не только от динамики системы на каждом режиме, но и от согласованности режимов при их переключении. В связи с этим усилия в исследовании систем с переключаемой структурой направлены на анализ их устойчивости и стабилизируемости [22–26], а также на способы синтеза регуляторов с гарантируемой устойчивостью и качеством управления [27–31]. При этом можно выделить два характерных подхода к синтезу рассматриваемых систем.



В первом случае динамические процессы задаются системой дифференциальных уравнений, которые формируют конечное множество возможных типовых траекторий. Оптимальная траектория движения системы составляется из отдельных участков этих типовых траекторий с помощью переключающего устройства, которое представляет собой конечный автомат с памятью. В памяти переключающего устройства хранятся интервалы времени, в течение которых движение будет происходить по выбранной траектории, и последовательность, в которой будут подключаться выбранные типовые траектории. В исследованиях, посвященных этому классу переключаемых систем, основное внимание уделяется разработке логических правил работы автомата, который должен обеспечить согласованное изменение состояния системы в момент переключения, не допуская скачков и забросов управляемой переменной.

Второй подход к синтезу систем с переключаемой структурой применяется тогда, когда правила переключения задаются в виде ограничений по времени, по состоянию или как следствие внешних воздействий, приложенных к объекту управления. Например, как это было рассмотрено выше, когда появляется необходимость обеспечить ограничение предельно допустимых значений параметров движения. В этом случае переключение структуры можно рассматривать как возмущающее воздействие, приложенное к системе. В связи с этим непрерывные подсистемы управляющей части системы должны обеспечивать компенсацию подобных возмущений путем согласования траекторий движения системы при изменении режимов ее работы. Отличительной особенностью систем этого класса является то, что системы скачкообразно меняют свои свойства в заранее неизвестные, случайные моменты времени. Это заставляет рассматривать их как системы со случайной структурой [32–34]. Следовательно, приходится иметь дело не с одной, оптимальной, траекторией движения, а с целым спектром траекторий, каждая из которых соответствует своему моменту переключения. В этом случае используют «средние» или обобщенные динамические характеристики системы, позволяющие оценить ее поведение в целом [35–37]. Однако область применения этих результатов часто бывает ограничена задачами анализа, поскольку считается, что характеристики системы во всех ее структурных состояниях известны. В связи с этим предлагается обобщенная характеристика системы с коммутацией каналов, пригодная для синтеза, т. е. позволяющая установить аналитическую зависимость между параметрами управляю-

щей части и совокупностью траекторий системы при переключении каналов в произвольный, случайный момент времени.

Целью настоящего исследования является разработка алгоритма синтеза, обеспечивающего согласование траекторий движения в системах с коммутацией каналов управления с использованием обобщенной характеристики, позволяющей описать весь ансамбль траекторий движения системы при переключении каналов управления в произвольный, случайный момент времени.

## 1. АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ С КОММУТАЦИЕЙ КАНАЛОВ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Пусть траектория системы на режиме управления заданным параметром  $y(t)$  объекта подчиняется уравнению

$$P_1(D)y(t) = Q_1(D)y_{\text{зад}}(t), \quad (1)$$

где  $y_{\text{зад}}(t)$  – программа управления заданным параметром;  $P_1(D) = a_n^{(1)} \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1^{(1)} \frac{d}{dt} + a_0^{(1)}$ ,  $Q_1(D) = b_m^{(1)} \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_1^{(1)} \frac{d}{dt} + b_0^{(1)}$ ;  $a_i^{(1)}$  ( $i = \overline{0, n}$ ),  $b_j^{(1)}$  ( $j = \overline{0, m}$ ) – параметры модели.

При переключении на канал ограничения в некоторый момент времени  $\tau$  уравнение траектории движения системы относительно параметра  $y(t)$  приобретает вид:

$$P_2(D)y(t, \tau) = Q_2(D)y_{\text{огр}}(t) \quad (2)$$

с начальными условиями, определяющими совпадение состояний системы в момент изменения режима управления:

$$y^{(r)}(t, \tau) \Big|_{t=\tau} = y^{(r)}(t) \Big|_{t=\tau}; \quad (r = 0, 1, \dots, n-1),$$

где  $y_{\text{огр}}(t)$  – программа ограничения заданного параметра;  $P_2(D) = a_n^{(2)} \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1^{(2)} \frac{d}{dt} + a_0^{(2)}$ ,  $Q_2(D) = b_m^{(2)} \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_1^{(2)} \frac{d}{dt} + b_0^{(2)}$ .

Для согласования траекторий движения системы при переключении канала управления на канал ограничения в произвольный, случайный момент времени  $\tau \in [0; +\infty)$  рассмотрим обобщенную характеристику системы в следующем виде:

$$E(y(t)) = \int_0^{\infty} y(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $f(\tau)$  – функция распределения случайного момента времени  $\tau$ .

В интервале времени  $0 \leq t \leq \tau$  траектория системы удовлетворяет уравнению (1). При этом  $y(t, \tau) = y(t)$ . В интервале времени  $0 \leq \tau \leq t$  в работу вступает контур ограничения и траектория системы  $y(t, \tau)$  будет соответствовать уравнению (2).

Считаем, что переключение структуры управления происходит с постоянной интенсивностью  $\lambda$ . Тогда функция распределения времени переключения подчиняется закону  $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ . Разобьем интеграл (3) на два слагаемых, которые соответствуют указанным режимам работы:

$$E(y(t)) = \int_0^t y(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^\infty y(t) f(\tau) d\tau = \int_0^t y(t, \tau) f(\tau) d\tau + y(t) e^{-\lambda t}.$$

Для вычисления интеграла в последнем выражении представим решение системы (2) в виде суммы  $y(t, \tau) = y^{(1)}(t) + y^{(II)}(t, \tau)$  частного решения неоднородного уравнения (2) с нулевыми начальными условиями и общего решения соответствующего однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями. Поскольку для  $y(t, \tau)$  справедливы начальные условия для системы (2), получаем

$$\left[ y^{(II)}(t, \tau) \right]^{(i)} \Big|_{t=\tau} = \left[ y(t) \right]^{(i)} \Big|_{t=\tau} - y^{(1)}(t) \Big|_{t=\tau}^{(i)}, \quad i = 0, (n-1).$$

Решение однородного уравнения найдем в следующем виде [38]:

$$y^{(II)}(t, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} Y^{(i)}(\tau) a_{i+j+1}^{(2)} \cdot [w_2(t-\tau)]^{(j)},$$

где  $Y^{(i)}(\tau) = [y(\tau) - y^{(1)}(\tau)]^{(i)}$ ,  $w_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{P_2(s)} \right\}$ .

В результате выражение для  $E(y(t))$  приобретает вид:

$$E(y(t)) = y(t) e^{-\lambda t} + y^{(1)}(t) (1 - e^{-\lambda t}) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} a_{i+j+1}^{(2)} \int_0^t Y^{(i)}(\tau) \lambda e^{-\lambda\tau} \cdot [w_2(t-\tau)]^{(j)} d\tau. \quad (4)$$

Обобщенная характеристика системы, аналогичная (4), ранее использовалась в публикациях [39, 40]. Однако в этих работах для обеспечения желаемых траекторий движения при переключении каналов предлагалось осуществить локализацию корней знаменателя изображения этой обобщенной характеристики в заданной области комплексной плоскости. Такой подход не гарантирует полного отсутствия скачков и забросов в момент переключения каналов, поскольку вид временных

характеристик зависит не только от знаменателя изображения, но и от его числителя. В связи с этим потребуем, чтобы обобщенная характеристика системы  $E(y(t))$  лежала в заданных пределах

$$E_1(t) \leq E(y(t)) \leq E_2(t). \quad (5)$$

## 2. ОБЕСПЕЧЕНИЕ СОГЛАСОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ С КОММУТАЦИЕЙ КАНАЛОВ

Для обеспечения условия (5) найдем предварительно изображение по Лапласу для  $E(y(t))$ :

$$E(s) = L\{E(y(t))\} = L\{y(t) e^{-\lambda t}\} + L\{y^{(1)}(t) (1 - e^{-\lambda t})\} + L\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} a_{i+j+1}^{(2)} \int_0^t Y^{(i)}(\tau) \lambda e^{-\lambda\tau} [w_2(t-\tau)]^{(j)} d\tau \right\}.$$

В результате получаем

$$E(s) = y(s + \lambda) + (y^{(1)}(s) - y^{(1)}(s + \lambda)) + \frac{\lambda [y(s + \lambda) - y^{(1)}(s + \lambda)]}{P_2(s)} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} a_{i+j+1}^{(2)} (s + \lambda)^i s^j.$$

Преобразуем двойную сумму в последнем выражении следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} a_{i+j+1}^{(2)} (s + \lambda)^i s^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} a_k^{(2)} (s + \lambda)^l s^{k-l-1} = \sum_{k=1}^n a_k^{(2)} \frac{(s + \lambda)^k - s^k}{(s + \lambda) - s} = \frac{P_2(s + \lambda) - P_2(s)}{\lambda}.$$

С учетом этого соотношения искомое изображение принимает вид:

$$E(s) = y^{(1)}(s) + (y(s + \lambda) - y^{(1)}(s + \lambda)) \frac{P_2(s + \lambda)}{P_2(s)}.$$

Чтобы на основе полученного изображения  $E(s)$  найти оригинал обобщенной характеристики системы  $E(y(t))$ , необходимо осуществить обратное преобразование Лапласа. Однако сделать это в общем виде не представляется возможным, поскольку изображение зависит от неизвестных параметров управляющей части системы. В связи с этим воспользуемся специальным методом численного обращения преобразования Лапласа. Этот метод базируется на аппроксимации дельта-функции  $\delta(t, \tau)$  частичной суммой ряда

$$\delta_q(t, \tau) = \sum_{i=1}^q d_i(t) \varphi_i(\tau),$$

построенного с использованием совокупности ортонормированных с весом  $g(t) = \exp(-\alpha t)$  ( $\alpha \geq 0$ ) экспоненциальных полиномов вида



$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^i c_{ij} \exp(-\beta(j-1)t), \quad (\beta > 0; i = 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  вычисляются, согласно изложенному в работе [41], следующим образом:

$$c_{i+1,j+1} = \frac{(-1)^{i+j} \Gamma(i+j+\delta+1) \sqrt{(\delta+2i+1)\beta}}{j!(i-j)! \Gamma(j+\delta+1)},$$

$$i, j = 0, 1, \dots,$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $\delta = (\alpha - \beta)/\beta$ .

Экспоненциальные полиномы  $\varphi_i(t)$  можно получить из любых классических ортогональных многочленов  $p_i(z)$ , таких как полиномы Лежандра, Лагерра, Эрмита и т. д. [42], заменой переменной  $z = \exp(-\beta t)$ . Такая замена позволяет описывать траектории движения синтезируемой системы во всем временном диапазоне  $t \in [0; +\infty)$ .

Покажем, что последовательность  $\delta_q(t, \tau)$  частичных сумм ряда сходится к дельта-функции  $\delta(t, \tau)$ . Для этого введем вспомогательную функцию  $v(t) = g(t)E(y(t))$ , для которой

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty v(\tau) \delta_q(t, \tau) d\tau =$$

$$= \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \int_0^\infty g(\tau) E(y(\tau)) \varphi_i(\tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части последнего равенства представляет собой не что иное как формулу для расчета коэффициентов ортогонального ряда при разложении функции  $E(y(t))$  по системе экспоненциальных полиномов

$$e_i[E] = \int_0^\infty g(\tau) E(y(\tau)) \varphi_i(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty v(\tau) \delta_q(t, \tau) d\tau = \lim_{q \rightarrow \infty} g(t) \sum_{i=1}^q e_i(E) \varphi_i(t).$$

Так как ортогональный ряд является сходящимся для любой интегрируемой с квадратом и весом  $g(t)$  функции  $E(y(t))$ , то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q e_i(E) \varphi_i(t) = E(y(t))$$

$$\text{и } \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty v(\tau) \delta_q(t, \tau) d\tau = g(t) E(y(t)) = v(t).$$

Таким образом,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty v(\tau) \delta_q(t, \tau) d\tau = \int_0^\infty v(\tau) \delta(t, \tau) d\tau = v(t).$$

Отсюда следует, что

$$\delta(t, \tau) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \varphi_i(\tau).$$

Воспользуемся полученным разложением дельта-функции для обращения преобразования Лапласа

$$E(s) = \int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) d\tau.$$

Для этого используем следующие преобразования:

$$\int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \varphi_i(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) \varphi_i(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) \sum_{j=1}^i c_{ij} \exp(-\beta(j-1)\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \sum_{j=1}^i c_{ij} E(s + (j-1)\beta).$$

С другой стороны,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) \sum_{i=1}^q g(t) \varphi_i(t) \varphi_i(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} E(y(\tau)) \delta_q(t, \tau) d\tau = e^{-st} E(y(t)).$$

Если принять  $s = \alpha$ , то

$$E(y(t)) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q \varphi_i(t) \sum_{j=1}^i c_{ij} E(\alpha + (j-1)\beta) =$$

$$= \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q e_i(E) \varphi_i(t). \quad (6)$$

Следовательно, коэффициенты ряда при разложении функции  $E(y(t))$  по системе экспоненциальных полиномов вычисляются на основе совокупности значений ее изображения  $E(s)$ , найденных в точках вещественной оси

$$e_i(E) = \sum_{j=1}^i c_{ij} E(\alpha + (j-1)\beta), \quad i = 1, 2, \dots$$

Покажем, как полученное выражение для обобщенной характеристики  $E(y(t))$  в виде ряда по системе экспоненциальных полиномов позволяет формализовать задачу синтеза согласованного управления в системе с коммутацией каналов.

### 3. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С КОММУТАЦИЕЙ КАНАЛОВ В ПРЕДЕЛАХ ЖЕЛАЕМОЙ ОБЛАСТИ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Представим частичную сумму экспоненциального ряда (6) в следующем виде:

$$E(y(t)) = \sum_{i=1}^q e_i(E) \varphi_i(t) = \sum_{k=1}^q r_k(E) \exp(-\beta(k-1)t).$$

Здесь  $r_k(E) = \sum_{i=1}^q \lambda_{ik} e_i(E)$ .

Рекомендации по выбору числа  $q$  удерживаемых членов ряда, обеспечивающих требуемую точность аппроксимации, можно найти в целом ряде источников (см., например, работы [42, 43]). Если разложить в аналогичный экспоненциальный ряд границы желаемой области временных характеристик

$$E_1(t) = \sum_{k=1}^q r_k(E_1) \exp(-\beta(k-1)t);$$

$$E_2(t) = \sum_{k=1}^q r_k(E_2) \exp(-\beta(k-1)t),$$

то систему неравенств (5) можно записать в таком виде:

$$E(y(t)) - E_1(t) = \sum_{k=1}^q R_k^{(I)}(E) \exp(-\beta(k-1)t) \geq 0;$$

$$E_2(t) - E(y(t)) = \sum_{k=1}^q R_k^{(II)}(E) \exp(-\beta(k-1)t) \geq 0,$$

где  $R_k^{(I)}(E) = [r_k(E) - r_k(E_1)]$ ,  $R_k^{(II)}(E) = [r_k(E_2) - r_k(E)]$ .

Произведем замену переменной  $z = \exp(-\beta t)$ , тогда систему ограничений можно записать следующим образом:

$$P_1(z) = \sum_{k=1}^q R_k^{(I)}(E) z^{(k-1)} \geq 0; P_2(z) = \sum_{k=1}^q R_k^{(II)}(E) z^{(k-1)} \geq 0.$$

Для того чтобы полиномы  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$  были неотрицательными в интервале  $[0; 1]$ , достаточно потребовать следующее: полиномы должны принимать положительное значение хотя бы в одной точке этого интервала и, кроме того, все их действительные корни должны располагаться правее точки  $z = 1$ .

Согласно теореме Ньютона о границах корней полиномов число  $z = 1$  является нижней границей положительных корней полиномов  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$ , если выполняются условия

$$\left[ z^{q-1} P_1\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=1}^{(p)} \geq 0, \left[ z^{q-1} P_2\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=1}^{(p)} \geq 0, \quad (7)$$

$$p = 0, 1, \dots, q-1.$$

Потребуем, чтобы полиномы  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$  были положительными в точке  $z = 0$ , т.е.  $P_1(0) = r_1(E) - r_1(E_1) > 0; P_2(0) = r_1(E_2) - r_1(E) > 0$ .

Объединяя эти условия с неравенствами (7), получим совокупность ограничений, которые определяют принадлежность обобщенной характеристики  $E(y(t))$  заданной области:

$$r_1(E) - r_1(E_1) > 0; r_1(E_2) - r_1(E) > 0;$$

$$\sum_{i=1}^{q-p} \left[ \frac{(q-i)!}{(q-p-i)!} \right] (r_i(E) - r_i(E_1)) \geq 0; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{q-p} \left[ \frac{(q-i)!}{(q-p-i)!} \right] (r_i(E_2) - r_i(E)) \geq 0;$$

$$p = 0, 1, \dots, q-2.$$

При решении полученной системы алгебраических неравенств рекомендуется применять эвристические алгоритмы поиска нулевого порядка, например, метод Хука – Дживса.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим задачу синтеза системы управления угловым движением летательного аппарата в вертикальной плоскости.

#### 4. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ УГЛОМ ТАНГАЖА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НОРМАЛЬНОЙ ПЕРЕГРУЗКИ

Рассмотрим систему управления углом тангажа с каналом ограничения нормальной перегрузки, предложенную в [44]. Структурная схема этой системы показана на рис. 1.

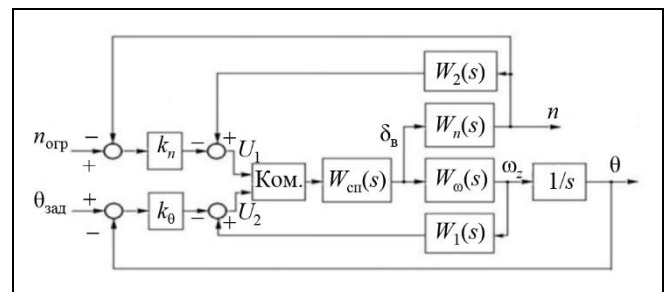


Рис. 1. Структурная схема системы управления углом тангажа с каналом ограничения нормальной перегрузки

Алгоритм работы коммутатора заключается в том, что он выбирает максимальный по абсолютной величине сигнал управления и подает его на сервопривод:

$$U = \begin{cases} U_1, & \text{если } |U_1| > |U_2|; \\ U_2, & \text{если } |U_2| > |U_1|. \end{cases}$$

Передаточные функции летательного аппарата при управлении рулем высоты  $\delta_B$  имеют вид:

$$\begin{aligned} & \text{— по угловой скорости тангажа } \omega_z: W_\omega(s) = \\ & = \frac{-(s+2,012)}{s^2 + 4,107s + 25,256}; \end{aligned}$$



– по нормальной перегрузке  $n$ :  $W_n(s) = \frac{-1}{s^2 + 4,107s + 25,256}$ .

Передаточная функция сервопривода руля вы-  
соты  $W_{\text{вн}}(s) = \frac{10}{s}$ .

Выбрав физически реализуемый астатический автопилот угла тангажа со скоростной обратной связью, получаем следующую передаточную функцию  $W_1(s)$ :

$$W_1(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{T_2 s^2 + T_1 s + 1},$$

здесь  $k_0, k_1, k_2$ , а также  $k_0$ , – передаточные числа автопилота (см. рис. 1).

В свою очередь, передаточную функцию  $W_2(s)$  для автомата ограничения перегрузки выбираем в следующем виде:

$$W_2(s) = \frac{k_4 s^2 + k_3 s}{T_4 s^2 + T_3 s + 1},$$

где  $k_3, k_4$  и  $k_n$  – передаточные числа автомата ограничения (см. рис. 1).

Используя введенные характеристики, найдем передаточную функцию контура управления углом тангажа

$$\Phi_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} = \frac{b_3^{(1)} s^3 + b_2^{(1)} s^2 + b_1^{(1)} s + b_0^{(1)}}{a_6^{(1)} s^6 + a_5^{(1)} s^5 + a_4^{(1)} s^4 + a_3^{(1)} s^3 + a_2^{(1)} s^2 + a_1^{(1)} s + a_0^{(1)}},$$

где

$$b_3^{(1)} = 10k_0 T_2; \quad b_2^{(1)} = 10k_0 (2,012T_2 + T_1);$$

$$b_1^{(1)} = 10k_0 (2,012T_1 + 1); \quad b_0^{(1)} = 20,12k_0;$$

$$a_6^{(1)} = T_2; \quad a_5^{(1)} = 4,107T_2 + T_1;$$

$$a_4^{(1)} = 25,256T_2 + 4,107T_1 + 10k_2 + 1;$$

$$a_3^{(1)} = 25,256T_1 + 10k_1 + 20,12k_2 + 10k_0 T_2 + 4,107;$$

$$a_2^{(1)} = 10k_0 + 20,12k_1 + 20,12k_0 T_2 + 10k_0 T_1 + 25,256;$$

$$a_1^{(1)} = 20,12k_0 + 20,12k_0 T_1 + 10k_0; \quad a_0^{(1)} = 20,12k_0.$$

Аналогично для контура ограничения нормальной перегрузки находим следующую передаточную функцию:

$$\Phi_2(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{b_3^{(2)} s^3 + b_2^{(2)} s^2 + b_1^{(2)} s + b_0^{(2)}}{a_6^{(2)} s^6 + a_5^{(2)} s^5 + a_4^{(2)} s^4 + a_3^{(2)} s^3 + a_2^{(2)} s^2 + a_1^{(2)} s},$$

где

$$b_3^{(2)} = 10k_n T_4; \quad b_2^{(2)} = 10k_n (T_3 + 2,012T_4);$$

$$b_1^{(2)} = 10k_n (2,102T_3 + 1); \quad b_0^{(2)} = 10k_n; \quad a_6^{(2)} = T_4;$$

$$a_5^{(2)} = 4,107T_4 + T_3; \quad a_4^{(2)} = 25,256T_4 + 4,107T_3 + 1;$$

$$a_3^{(2)} = 25,256T_3 + 10k_n T_4 + 10k_4 + 4,107;$$

$$a_2^{(2)} = 10k_3 + 10k_n T_3 + 25,256; \quad a_1^{(2)} = 10k_n.$$

Полагаем, что переключение каналов управления происходит с постоянной интенсивностью  $\lambda = 1 \text{ с}^{-1}$ . Потребуем, чтобы обобщенная характеристика системы  $E(y(t))$  лежала в области, ограниченной функциями  $E_1(t) = 0,9(1 - 2\exp(-0,5t) + \exp(-t))$ ,  $E_2(t) = 1,1(1 - \exp(-4t))$ . Чтобы границы этой области принадлежали базису экспоненциального ряда, выбираем его параметры такими:  $\alpha = \beta = 0,5$ ;  $q = 9$ .

Коэффициенты экспоненциальных рядов для границ области принимают следующие значения:

$$r_1(E_1) = 0,9; \quad r_2(E_1) = -1,8; \quad r_3(E_1) = 0,9; \quad r_4(E_1) = 0;$$

$$r_5(E_1) = 0; \quad r_6(E_1) = 0; \quad r_7(E_1) = 0; \quad r_8(E_1) = 0; \quad r_9(E_1) = 0;$$

$$r_1(E_2) = 1,1; \quad r_2(E_2) = 0; \quad r_3(E_2) = 0; \quad r_4(E_2) = 0;$$

$$r_5(E_2) = 0; \quad r_6(E_2) = 0; \quad r_7(E_2) = 0; \quad r_8(E_2) = 0;$$

$$r_9(E_2) = -1,1.$$

В свою очередь, для обобщенной характеристики  $E(y(t))$  эти коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$r_k(E) = \sum_{i=k}^q \sum_{j=1}^i c_{ij} c_{ik} E(0,5j), \quad k = 1, 2, \dots, 9,$$

где

$$E(0,5j) = \frac{0,5j Q_1(0,5j+1) P_2(0,5j+1)}{0,5j(0,5j+1) P_1(0,5j+1) P_2(0,5j)} + \frac{[(0,5j+1) Q_2(0,5j) - 0,5j Q_2(0,5j)] P_1(0,5j+1)}{0,5j(0,5j+1) P_1(0,5j+1) P_2(0,5j)}.$$

Подставляя найденные выражения в систему неравенств (8), получаем совокупность ограничений для параметров управляющей части. Решая систему неравенств, находим следующую совокупность значений параметров:

$$k_0 = 60,49; \quad k_n = 50,42; \quad k_0 = 17,76; \quad k_1 = 11,11;$$

$$k_2 = 1,11; \quad k_3 = 16,49; \quad k_4 = 1,99; \quad T_1 = 0,50;$$

$$T_2 = 0,0005; \quad T_3 = 0,002; \quad T_4 = 0,000001.$$

Модель синтезированной системы, построенная с использованием пакета Matlab Simulink, представлена на рис. 2.

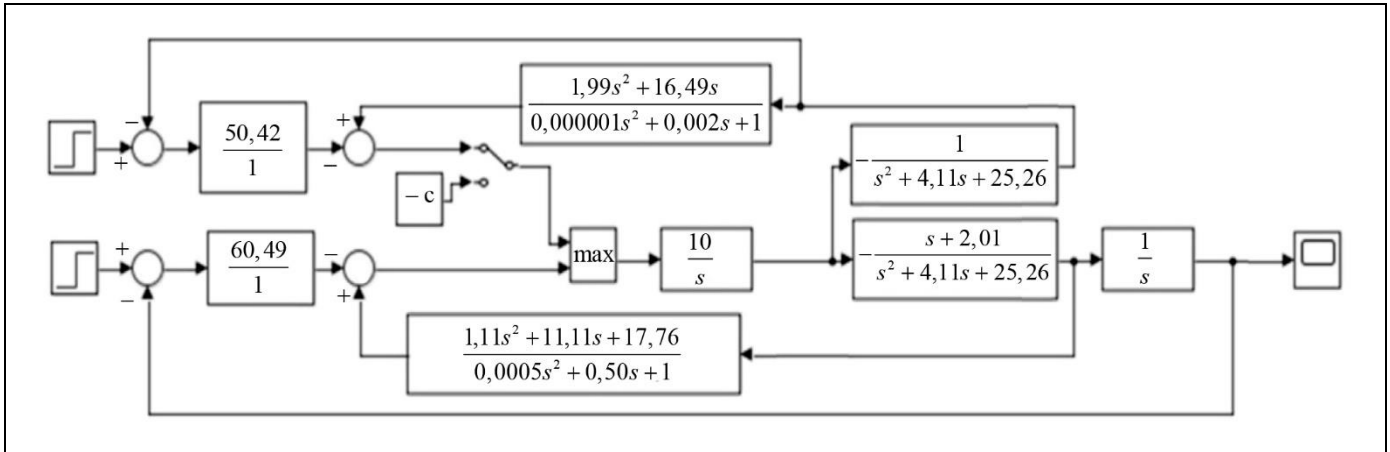


Рис.2. Модель синтезированной системы

На рис. 3 представлены результаты моделирования синтезированной системы.

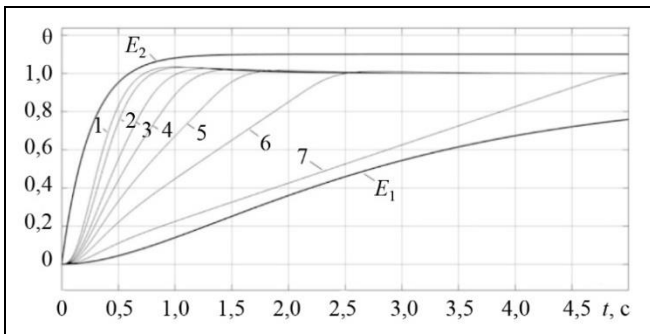


Рис. 3. Переходные процессы в системе управления углом тангажа с каналом ограничения нормальной перегрузки

Графики на рис. 3 соответствуют следующим моментам переключения: 1 –  $\tau = 0,1$  с; 2 –  $\tau = 0,3$  с; 3 –  $\tau = 0,6$  с; 4 –  $\tau = 0,8$  с; 5 –  $\tau = 1,3$  с; 6 –  $\tau = 2,1$  с; 7 –  $\tau = 4,6$  с.

Как показывают результаты моделирования, переходные процессы в системе, полученные для различных моментов переключения каналов, принадлежат заданной области и сохраняют аperiодический характер, что свидетельствует о согласованности режимов работы системы при коммутации каналов.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе подход позволяет с общих позиций исследовать процессы, протекающие в системах управления подвижными объектами с коммутацией каналов. С этой целью предложено использовать обобщенную характеристику, описывающую весь ансамбль выходных реакций системы управления, полученный для всех воз-

можных моментов изменения структуры ее управляющей части. Возможность использования данной обобщенной характеристики при решении задачи синтеза систем управления подвижными объектами обеспечивается благодаря специально разработанному методу численного обращения преобразования Лапласа. Приведенный пример синтеза системы автоматического управления углом тангажа летательного аппарата с ограничением нормальной перегрузки подтверждает работоспособность предложенного подхода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Г.Н., Нартов Б.К., Чуканов С.Н. Оперативный контроль и управление подвижными объектами. – М.: Научтехлитиздат, 2003. – 111 с. [Lebedev, G.N., Nartov, B.K., Chukanov, S.N. Operativnyj kontrol' i upravlenie podvizhnyimi ob'ektami. – М.: Nauchtekhlitizdat, 2003. – 111 s. (In Russian)].
2. Пишихопов В.Х., Медведев М.Ю. Многоконтурное адаптивное управление подвижными объектами при решении траекторных задач // Проблемы управления. – 2018. – № 6. – С. 62–72. [Pshihopov, V.H., Medvedev, M.Yu. Multi-loop Adaptive Control of Mobile Objects in Solving Trajectory Tracking Tasks // Control Sciences. – 2018. – No. 6. – P. 62–72. (In Russian)].
3. Васильев С.Н., Маликов А.И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. – Казань: Фолиант, 2011. – Т.1. – С. 23–81. [Vasil'ev, S.N., Malikov, A.I. O nekotoryh rezul'tatah po ustojchivosti pereklyuchaemyh i gibridnyh sistem // Aktual'nye problem mekhaniki sploshnoj sredy. – Kazan': Foliant, 2011. – Vol. 1. – P. 23–81. (In Russian)].
4. Bortakovskii A.S. Necessary Optimality Conditions for Switched Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2016. – Vol. 55. – P. 712–724. – DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230716050051>.
5. Sun, Y., Zhang, C., Lu, X.-L., et al. Dynamic Optimization of Differential-algebraic Equations with Inequality Path Con-



- straints // *Acta Automatica Sinica*. – 2019. – Vol. 45, no. 5. – P. 897–905. – DOI: 10.16383/j.aas.c180302.
6. Schwarz, D.E., Lamour, R. A Projector Based Decoupling of DAEs Obtained from the Derivative Array // In: Reis T., Grun- del, S., Schöps, S. (eds) *Progress in Differential-Algebraic Equations II*. – Cham: Springer, 2020. – P. 3–38. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-53905-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53905-4_1).
  7. Demir, A., Hanay, M.S. Numerical Analysis of Multidomain Systems: Coupled Nonlinear PDEs and DAEs With Noise // *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. – 2018. – Vol. 37, no. 7. – P. 1445–1458. – DOI: 10.1109/TCAD.2017.2753699.
  8. Nañez, P., Sanfelice, R.G., Quijano, N. Notions and a Passivity Tool for Switched DAE Systems // *Proceedings of 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. – Melbourne, 2017. – P. 3612–3617. – DOI: 10.1109/CDC.2017.8264190.
  9. Yang, M., Lian, J., Han, Y. Exponentially Passive Analysis of Switched Linear Systems with a Novel Storage Function // *Proceedings of 2018 Chinese Automation Congress (CAC)*. – Xi'an, 2018. – P. 4014–4019. – DOI: 10.1109/CAC.2018.8623256.
  10. Chesi, G., Colaneri, P. Structured Feedback Synthesis for Stability and Performance of Switched Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2020. – Vol. 65, no. 11. – P. 4695–4709. – DOI: 10.1109/TAC.2019.2962218.
  11. Pappalardo, C.M., Guida, D. On the Computational Methods for Solving the Differential-Algebraic Equations of Motion of Multibody Systems // *Machines*. – 2018. – Vol. 6, no. 20. – P. 1–15.
  12. Gai, W., Sun, C., Zhou, Y., Zhang, J. A New Control Allocation Method Based on the Improved Grey Wolf Optimizer Algorithm for Aircraft with Multiple Actuators // *Proceedings of 2019 CAA Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes (SAFEPROCESS)*. – Xiamen, 2019. – P. 438–442. – DOI: 10.1109/SAFEPROCESS45799.2019.9213444.
  13. Zhao, Y., Zhao, J., Fu, J., et al. Rate Bumpless Transfer Control for Switched Linear Systems with Stability and Its Application to Aero-Engine Control Design // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2020. – Vol. 67, no. 6. – P. 4900–4910. – DOI: 10.1109/TIE.2019.2931222.
  14. Li, J., Wei, G., Ding, D., Li, Y. Quantized Control for Networked Switched Systems with a More General Switching Rule // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. – 2020. – Vol. 50, no. 5. – P. 1909–1917. – DOI: 10.1109/TSMC.2018.2791614.
  15. Papadopoulos, A.V., Terraneo, F., Leva, A., Prandini, M. Switched Control for Quantized Feedback Systems: Invariance and Limit Cycle Analysis // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2018. – Vol. 63, no. 11. – P. 3775–3786. – DOI: 10.1109/TAC.2018.2797246.
  16. Kuppasamy, S., Joo, Y.H. Nonfragile Retarded Sampled-Data Switched Control of T–S Fuzzy Systems and Its Applications // *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. – 2020. – Vol. 28, no. 10. – P. 2523–2532. – DOI: 10.1109/TFUZZ.2019.2940432.
  17. Fei, Z., Shi, S., Wang, T., Ahn, C.K. Improved Stability Criteria for Discrete-Time Switched T–S Fuzzy Systems // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. – 2021. – Vol. 51, no. 2. – P. 712–720. – DOI: 10.1109/TSMC.2018.2882630.
  18. Zhao, X., Yin, Y., Liu, L., Sun, X. Stability Analysis and Delay Control for Switched Positive Linear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2018. – Vol. 63, no. 7. – P. 2184–2190. – DOI: 10.1109/TAC.2017.2757460.
  19. Wu, J., Yang, X., Zhang, C., Li J. Adaptive Finite-Time Control Design for a Class of Uncertain Nonlinearly Parameterized Switched Systems // *IEEE Access*. – 2019. – Vol. 7. – P. 95941–95949. – DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2929841.
  20. Zhu, Y., Zheng, W.X. Multiple Lyapunov Functions Analysis Approach for Discrete-Time-Switched Piecewise-Affine Systems Under Dwell-Time Constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2020. – Vol. 65, no. 5. – P. 2177–2184. – DOI: 10.1109/TAC.2019.2938302.
  21. Xiao, X., Zhou, L., Ho, D.W.C., Lu, G. Event-Triggered Control of Continuous-Time Switched Linear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2019. – Vol. 64, no. 4. – P. 1710–1717. – DOI: 10.1109/TAC.2018.2853569.
  22. Trenn, S. Stabilization of switched DAEs via fast switching // *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2016. – Vol. 16. – P. 827–828. – DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.201610402>.
  23. Komae, A. Stabilization of Linear Systems by Pulse-Width Modulation of Switching Actuators // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2020. – Vol. 65, no. 5. – P. 1969–1984. – DOI: 10.1109/TAC.2019.2926943.
  24. Wang, P., Zhao, J. Feedback Dissipativity and Stabilization for Switched Positive Systems With a Combined Switching Law // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. – 2020. – Vol. 67, no. 11. – P. 2572–2576. – DOI: 10.1109/TCSII.2019.2962283.
  25. Wang, Z.-M., Wei, A., Zhao, X., et al. Stability Analysis of Discrete-Time Switched Systems With Unstable Modes: An Improved Ratio-Based Tradeoff Approach // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. – 2021. – Vol. 68, no. 1. – P. 431–435. – DOI: 10.1109/TCSII.2020.3004400.
  26. Harivanam, P.R., Debasattam, P. Lie-Algebraic Criteria for Stability of Switched Systems of Differential Algebraic Equations (DAEs) // *IEEE Control Systems Letters*. – 2021. – Vol. 5(4). – P. 1333–1338. – DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3036577.
  27. Бортакoвский А.С. Необходимые условия оптимальности переключаемых систем // *Труды института математики и механики УрО РАН*. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 67–78. [Bortakovskij, A.S. Neobhodimye usloviya optimal'nosti pereklyuchaemyh sistem // *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. – 2021. – Vol. 27, no. 2. – S. 67–78. (In Russian)].
  28. Chen, Y., Respondek, W. Geometric Analysis of Differential-Algebraic Equations via Linear Control Theory // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2021. – Vol. 59, no. 1. – P. 103–130. – DOI: 10.1137/20M1329330.
  29. Berger, T. Controlled Invariance for Nonlinear Differential-Algebraic Systems // *Automatica*. – 2016. – Vol. 64. – P. 226–233.
  30. Ilchmann, A., Leben, L., Witschel, J., Worthmann, K. Optimal Control of Differential-Algebraic Equations from an Ordinary Differential Equation Perspective // *Optimal Control Applications and Methods*. – 2019. – Vol. 40, no. 10. – P. 351–366. – DOI: 10.1002/oca.2481.
  31. Terasaki, S., Kazuhiro, S. Minimal controllability problems on linear structural descriptor systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2021. – Vol. 67, no. 5. – P. 2522–2528. – DOI: 10.1109/TAC.2021.3079359.
  32. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Системы со случайной скачкообразной структурой. – М.: Издательский Дом Академии Жуковского, 2022. – 272 с. [Buhalyov, V.A.,



- Skrynnikov, A.A., Boldinov, V.A. Sistemy so sluchajnoj skachkoobraznoj strukturoj. – M.: Izdatel'skij Dom Akademii Zhukovskogo, 2022. – 272 s. (In Russian)].
33. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Статистические алгоритмы фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой // Вестник российских университетов. Математика – 2020. – Т. 25, № 130. – С. 109–122. [Averina, T.A., Rybakov, K.A. Statisticheskie algoritmy fil'tracii dly asistem so sluchajno izmenyayushchejsya strukturoj // Vestnik rossijskih universitetov. Matematika. – 2020. – Vol. 25, no. 130. – P. 109–122. (In Russian)].
34. *Бухалев В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. – М.: Физматлит, 2021. – 176 с. [Buhalev, V.A., Skrynnikov, A.A., Boldinov, V.A. Igrovoe upravlenie sistemami so sluchajnoj skachkoobraznoj strukturoj. – M.: Fizmatlit, 2021. – 176 s. (In Russian)].
35. *Скляревич А.Н., Скляревич Ф.А.* Вероятностные модели объектов с возможными изменениями. – Рига: Зинатне, 1989. – 366 с. [Sklyarevich, A.N., Sklyarevich, F.A. Veroyatnostnye modeli ob'ektov s vozmozhnymi izmeneniyami. – Riga: Zinatne, 1989. – 366 s. (In Russian)].
36. *Fei, Z., Guan, C., Zhao, X.* Event-Triggered Dynamic Output Feedback Control for Switched Systems With Frequent Asynchronism // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2020. – Vol. 65, no. 7. – P. 3120–3127. – DOI: 10.1109/TAC.2019.2945279.
37. *Mostacciolo, E., Vasca, F., Baccari, S.* Differential Algebraic Equations and Averaged Models for Switched Capacitor Converters with State Jumps // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2018. – Vol. 33, no. 4. – P. 3472–3483. – DOI: 10.1109/TPEL.2017.2702389.
38. *Doetsch, G., Herschel, R.* Anleitung Zum Praktischen Gebrauch Der Laplace-transformation Und Der Z-Transformation. – München: R. Oldenbourg Verlag, 1967. – 256 p.
39. *Абдуллина Э.Ю., Ефанов В.Н.* Управление креном высокоманевренного летательного аппарата в условиях структурной неопределенности // Изв. вузов. Приборостроение. – 2020. – Т. 63, № 1. – С. 26–34. [Abdullina, E.Yu., Efanov, V.N. Upravlenie krenom vysokomanevrennogo letatel'nogo apparata v usloviyah strukturnoj neopredefinennosti // Izv. vuzov. Priborostroenie. – 2020. – Vol. 63, no. 1. – P. 26–34. (In Russian)].
40. *Abdullina, E.Y., Efanov, V.N.* Synthesis of Pitch Angle Control System with Angle of Attack Limiting Channel // Russian Aeronautics. – 2020. – Vol. 63, no. 1. – P. 25–32. – DOI: 10.3103/S1068799820010043.
41. *Денисенко Д.А., Ефанов В.Н.* Синтез робастных систем управления в среде ортогональных функций экспоненциального вида // Информационно-управляющие системы. – 2012. – № 4. – С. 52–58. [Denisenko, D.A., Efanov, V.N. Sintez robastnyh sistem upravleniya v srede ortogonal'nyh funkcij eksponencial'nogo vida // Informacionno-upravlyayush chiesistemy. – 2012. – No. 4. – S. 52–58. (In Russian)].
42. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с. [Suetin, P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. – M.: Fizmatlit, 2005. – 480 s. (In Russian)].
43. *Szegő, G.* Orthogonal Polynomials. Colloquium Publications. Vol. 23, 4th ed. – American Mathematical Society, 1975. – 432 p.
44. *Патент RU 2 560 958 C1 РФ, МПКВ64С13/18.* Система автоматического управления углом тангажа и ограничения предельных значений параметров летательного аппарата: № 2014129734/11: заявл. 18.07.2014: опубл. 20.08.2015 Бюл. № 23 / Петунин В.И., Неугодникова Л.М., Абдуллина Э.Ю. [Patent RU 2 560 958 C1 RF, МПКВ64С13/18. Sistema avtomaticheskogo upravleniya uglom tanga zhaiogranicheniya predel'nykh znachenii parametrov letatel'nogo apparata: № 2014129734/11: zayavl. 18.07.2014: opubl. 20.08.2015 Byul. № 23 / Petunin, V.I., Neugodnikova, L.M., Abdullina, E.Yu. (In Russian)].

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Поступила в редакцию 13.04.2023,  
после доработки 17.08.2023.  
Принята к публикации 30.08.2023.

**Абдуллина Эльза Юнировна** – аспирант, ✉ elzik86@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-1800-2663>

**Ефанов Владимир Николаевич** – д-р техн. наук, ✉ efanov@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5917-2910>

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия.

© 2023 г. Абдуллина Э.Ю., Ефанов В.Н.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



## CONTROL SYSTEM DESIGN FOR MOVING OBJECTS WITH CHANNEL SWITCHING

E.Yu. Abdullina and V.N. Efanov

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

✉ elzik86@mail.ru, ✉ efanov@mail.ru

**Abstract.** This paper considers the problem of designing control systems for moving objects with control channel switching. A generalized characteristic is proposed to eliminate jumps and impulses that may occur at switching instants. This characteristic describes the entire ensemble of system trajectories under control channel switching at an arbitrary random instant. A numerical inversion method is developed for the Laplace transform based on expanding the delta function into a series of exponential polynomials. With this method, the generalized characteristic of the system can be approximated by a given time domain. The exponential series description of the generalized system characteristic allows reducing the original design problem to a system of algebraic inequalities. A particular example of designing an automatic pitch control system for an aircraft with a normal overload limit is presented; as is shown, the entire ensemble of trajectories obtained for different channel switching instants belongs to a given time domain.

**Keywords:** design, switched systems, selector, moving object, trajectory, angle of attack.