

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР РЫНКА ОЛИГОПОЛИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ

М.И. Гераськин, А.Г. Чхартишвили

Рассмотрена проблема моделирования структуры олигополистического рынка для произвольного числа агентов, линейных и нелинейных моделей рыночного спроса, нелинейных моделей издержек агентов. Равновесное поведение агентов описано на основе предположительных вариаций в моделях реагирования по Курно или по Штакельбергу (в случае одного или нескольких лидеров). Моделирование равновесий для телекоммуникационного рынка Поволжского региона РФ, для которого путем статистического анализа определены функции цен и издержек агентов на услуги голосовой связи и интернет-коммуникаций, показало адекватность модели реагирования Курно.

Ключевые слова: олигополия, нелинейные модели спроса и издержек, равновесие Нэша, реагирование по Курно, реагирование по Штакельбергу, телекоммуникационный рынок.

ВВЕДЕНИЕ

В экономике современной России отчетливо проявляется тенденция концентрации быстро растущих, локомотивных отраслей третичного сектора высокотехнологичных услуг, наиболее характерная для телекоммуникационного рынка, образованного тремя преобладающими агентами — ОАО «Вымпелком», ОАО «МегаФон», ОАО МТС. Вследствие этой тенденции устанавливаются рыночные структуры олигополистического типа, характерная черта которых состоит в предложении унифицированного товара настолько малым числом продавцов, что вариации действий (объемов предложения) каждого агента существенно влияют на равновесные показатели рынка в целом. Поэтому для рынков олигополии, моделируемых в виде мультиагентных систем с ограниченным числом агентов, в отличие от атомизированных рынков традиционных отраслей, равновесные состояния, сформированные на основе теоретико-игровых моделей, оказываются более адекватными. Актуальной представляется практическая проблема разработки моделей рыночных структур олигополии и последующей их верификации на основе сравнительного анализа с параметрами структур реальных рынков.

Игровая модель олигополии представляет собой совокупность модели рыночного спроса на товары (услуги), продаваемые агентами, моделей издержек агентов, а также моделей реагирования (*reaction functions*) агентов на действия (*actions*), т. е. вариации объемов продаж, конкурентов. В связи с этим точность в смысле приближения к реальной рыночной структуре и, как следствие, сложность модели олигополии определяются, прежде всего, типом функций, моделирующих рыночный спрос и издержки агентов, а также уровнем рефлексии, учитываемым при моделировании реагирования агентов в виде так называемых предположительных вариаций. Предположительная вариация (*conjectural variation*) [1] характеризует предполагаемое агентом ответное изменение объема продаж контрагента (*optimal response*), оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. В исследованиях рассмотрены вопросы устойчивости (*consistency*) предположительных вариаций при линейных и нелинейных моделях издержек агентов [2], обоснованы существование и единственность равновесия в предположительных вариациях в классической модели дуополии Курно [3] с постоянными (*consistent*) вариациями, а также в обобщенной модели Курно — Штакельберга [4, 5] с переменными вариациями



при гипотезах о возрастании функций издержек, убывании функции спроса и некоторых других.

Моделирование рыночного спроса и издержек агентов осуществлялось, в основном, для двух-трех агентов на основе линейных функций, причем учитывались: а) исключительно переменные издержки, в частности, исследовались модель ценовой дифференциации двух агентов и двух рынков [6], модель формирования и распада картеля двух агентов [7], модель ценовой дискриминации на рынке двух агентов с кусочно-линейными функциями спроса [8]; б) постоянный и переменный компоненты издержек, а именно, рассматривались модель дискриминационного картеля двух агентов с ограничением на цены предложения агентов [9], а также модель рынка аппаратного и программного обеспечения для трех агентов [10]. Рассматривались также мультиагентные модели с линейной функцией спроса и квадратичными либо линейными функциями издержек агентов: модель с квадратичными функциями издержек агентов рынка инновационных разработок [11], модель с линейными функциями издержек (только переменных) агентов системы нескольких рынков [12], коалиционная модель с квадратичными функциями издержек [13], вертикально интегрированная модель с линейными функциями переменных издержек агентов системы производственного сектора и сектора оптовой торговли [14], динамическая (с интегральными за период критериями) модель с квадратичными функциями переменных издержек агентов туристского рынка с ограничением на темп роста инвестиций [15], модель с линейными функциями переменных издержек и постоянными издержками [16], модель двухпродуктового рынка нефтедобывающих и нефтеперерабатывающих компаний, издержки которых описывались функциями Кобба — Дугласа [17], модель рынка электроэнергии с квадратичными функциями издержек при ограничениях по мощности [18].

Зарубежные исследования затрагивают теоретико-игровые аспекты функционирования олигополистических рынков без применения методов количественного анализа динамики цен и издержек агентов, базируясь на гипотезах линейных функций спроса и издержек: представлен обзор теоретических основ моделирования олигополии на медиарынке [19]; анализировались модели дуполии при бинарной ценовой дискриминации на рынке интернет-связи [20]; изучались факторы формирования и устойчивости картеля для моделей Курно и Штакельберга телекоммуникационного рынка Франции при постоянных и одинаковых (а также не равных взаимозависимых) предельных издержках агентов [21]; исследованы модели Курно и Штакельберга для рынка элект-

ронных платежей КНР при линейном спросе и линейных издержках агентов [22]; проанализированы модели последовательно формируемых равновесий Курно и Штакельберга для телекоммуникационного рынка КНР при постоянных и различных предельных издержках агентов [23].

Анализ результатов, полученных в этих исследованиях, показывает, что решение задачи моделирования существенно усложняется, прежде всего, в мультиагентных системах, поскольку с ростом числа агентов рынка увеличивается размерность системы условий оптимальности рыночного равновесия, а также число вариантов динамики этой системы в связи с ростом размерности вектора предположительных вариаций, а также в моделях, учитывающих нелинейный характер функций спроса и издержек агентов, для которых возникает система нелинейных условий оптимальности. Поэтому разработка методов моделирования мультиагентной олигополии с учетом нелинейных функций спроса и издержек и формирование алгоритмов выбора равновесных состояний способствуют развитию инструментария моделирования этого рынка.

1. МОДЕЛЬ РЫНКА ОЛИГОПОЛИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ

Предположим, что агенты выбирают оптимальные рыночные стратегии в соответствии с критерием прибыли, получаемой от продажи товаров (услуг), а ограничением служит функция рыночной цены от объема продаж

$$\Pi_i = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (1)$$

$$P = P(Q), \quad Q = \sum_{i=1}^I Q_i, \quad (2)$$

где Q_i и Π_i — объем продаж и прибыль i -го агента, I — число агентов рынка, P — рыночная цена товара (услуги). Параметрами управления выступают объемы продаж агентов, поскольку согласно неоклассической и кейнсианской теориям при изменении экономической конъюнктуры корректируются не цены, а объемы продаж [24]. В частности, для современных рынков высокотехнологичных услуг смещение точки равновесия по кривой спроса осуществляется не путем снижения цены, а благодаря расширению или сокращению наборов товаров (услуг), вследствие чего варьируется цена.

Рассмотрим линейную и степенную функции рыночных цен

$$P(Q) = a + bQ, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad (3)$$

$$P(Q) = AQ^\alpha, \quad A > 0, \quad \alpha < 0, \quad |\alpha| < 1 \quad (4)$$

и степенные функции издержек агентов

$$C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \\ 0 < \beta_i < 2, \quad i = 1, \dots, I, \quad (5)$$

где A, α, a, b — коэффициенты регрессий функций цен; B_i, β_i, C_{Fi} — коэффициенты регрессий функций издержек i -го агента. Параметры функций издержек имеют следующий смысл: C_{Fi} — постоянные издержки, B_i — предельные издержки при $\beta_i = 1$, β_i — характеризует эффект расширения масштаба, который может быть положительным ($0 < \beta_i < 1$) или отрицательным ($1 < \beta_i < 2$).

Рассматривается задача определения равновесия Курно — Нэша [25] для рынка с симметричным (одновременным и независимым) принятием решений или равновесия Штакельберга в случае асимметричного рынка с лидером (лидерами). Оптимальные (равновесные) состояния на рынке олигополии традиционно находятся [26] из решения системы необходимых условий оптимальности для задачи (1), (2) при заданном векторе предположительных вариаций:

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, Q'_i)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, I, \quad (6)$$

где Q'_i — предположительная вариация, т. е. предполагаемое изменение объема продаж j -го агента в ответ на единичный прирост продаж i -го агента.

Запишем систему необходимых условий оптимальности (6) для линейной (3)

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = a + bQ + bQ_i \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i}^I \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} \right) - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i-1} = 0, \\ i = 1, \dots, I, \quad (7)$$

и нелинейной (4) функции спроса

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = A Q^\alpha \left[1 + \alpha \frac{Q_i}{Q} \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i}^I \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} \right) \right] - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i-1} = 0, \\ i = 1, \dots, I. \quad (8)$$

Поскольку тип равновесия на рынке олигополии зависит [27] от размерности вектора предположительных вариаций, определяемых информационной рефлексией, рассмотрим возможные варианты информированности агентов.

Равновесие Курно. Неиерархическая структура рынка олигополии основана на гипотезе о равноправии агентов, постулирующей, во-первых, однотипность моделей издержек (в классической

постановке Курно, кроме того, постоянные и предельные издержки полагаются одинаковыми для всех агентов); во-вторых, неинформированность всех агентов о действиях окружения, что обуславливает нулевые предположительные вариации $Q'_i = 0$. При этих предположениях формируется равновесие Курно, при котором системы уравнений (7), (8) для всех агентов имеют вид соответственно

$$a + bQ + bQ_i - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (9)$$

$$A Q^\alpha \left[1 + \alpha \frac{Q_i}{Q} \right] - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (10)$$

Системы нелинейных уравнений (6), (7) посредством численного решения позволяют определить вектор объемов продаж агентов рынка при условии, что все агенты одновременно выбирают свои действия, не учитывая выбор других агентов. Заметим, что при постоянных предельных издержках $\beta_i = 1$ из уравнения (9) следует классическое (см. обзор [28]) уравнение линейной реакции Курно

$$Q_i = \frac{a - B_i + bQ_{-i}}{-2b},$$

а частным случаем (10) является уравнение реакции Курно при нелинейном спросе [29]

$$Q_i = \left(A(I + \alpha) / \sum_{i=1}^I B_i \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - Q_{-i},$$

где Q_{-i} — объем продаж окружения i -го агента. Анализ реакций агентов для этих частных случаев показывает, что с увеличением предельных издержек агента B_i его доля в равновесной рыночной структуре снижается, а из общих уравнений реакций (9), (10) для нелинейных функций издержек, кроме того, следует, что та же тенденция проявляется с увеличением темпа роста издержек β_i .

Неиерархическая структура рынка олигополии, приводящая к состоянию равновесия Курно, может сформироваться как в условиях абсолютных информационных барьеров на рынке, так и вследствие наличия у всех агентов общей информации о невозможности или нецелесообразности изменения равновесия.

Равновесие Штакельберга с одним лидером. Иерархическая модель рынка олигополии адекватна либо при нарушении гипотезы однотипности моделей издержек агентов, например, вследствие существенного отличия параметров функции из-



держек одного из агентов (несопоставимости агентов по масштабу), либо в случае *асимметричной предположительной информированности* на рынке, когда какой-либо агент (*лидер*) полагает, что информирован о действиях окружения. Поскольку для реальных рынков олигополии отклонения параметров функций издержек преобладающих агентов, как правило, незначительны, рассмотрим случай информационного лидерства некоторого k -го агента, информированного о том, что остальные агенты (назовем их *агентами Курно* и обозначим индексом « i ») выбирают действия по реакциям, неявно заданным уравнениями (9), (10). При этом формируется классическое равновесие Штакельберга, для определения которого дифференцированием уравнений (9), (10) как неявных функций $Q_i(Q_k)$, $k \neq i$, найдем предположительные вариации для линейной и нелинейной функций спроса соответственно

$$\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} = -\frac{b}{U_i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad k \neq i, \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} = \frac{F_i}{u_i - F_i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad k \neq i, \quad (12)$$

где $U_i = U_i(Q_i) = 2b - u_i$, $u_i = u_i(Q_i) = B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}$,

$$F_i = F_i(Q, Q_i) = A \alpha Q^{\alpha - 1} \left(1 + (\alpha - 1) \frac{Q_i}{Q} \right).$$

Для частного случая линейных функций издержек ($\beta_i = 1$) из формулы (11) следуют постоянные предположительные вариации агентов Курно для линейной функции спроса $Q'_{iQ_k} = -1/2$ [28], а из формулы (12) можно получить также постоянные предположительные вариации для степенной функции спроса $Q'_{iQ_k} = -1$ [29]. В общем случае формулы (11), (12) задают переменные предположительные вариации, как правило, отрицательные ($Q'_{iQ_k}(Q_i) < 0$), за исключением случая превалирующей доли на рынке какого-либо агента с положительным эффектом расширения масштаба¹. Проанализируем функции $Q'_{iQ_k}(Q_i)$ по абсолют-

ной величине: для линейного спроса функция U_i , как правило, отрицательна² и с увеличением рыночной доли i -го агента модуль функции $Q'_{iQ_k}(Q_i)$, как следует из формулы (11), возрастает при отрицательном эффекте масштаба и убывает в противном случае; для степенного спроса функция F_i , как правило, отрицательна³, поэтому с ростом Q_i при отрицательном эффекте масштаба функция $u_i > 0 \forall \beta_i > 1$ убывает, значит из формулы (12) следует возрастание модуля функции $Q'_{iQ_k}(Q_i)$, а при положительном эффекте масштаба ($u_i < 0 \forall \beta_i < 1$) — наоборот. Следовательно, при нелинейных функциях издержек увеличение доли агента в рыночной структуре приводит к изменению вектора предположительных вариаций и, в результате, к перераспределению рынка в пользу агентов с положительным эффектом масштаба.

Подставив вариации (11), (12) в системы необходимых условий оптимальности (7), (8), получим уравнения оптимальных реакций для лидера по Штакельбергу при линейной и степенной функциях спроса:

$$a + bQ + bQ_k \left(1 - b \sum_{i=1, i \neq k}^I \frac{1}{U_i} \right) - B_k \beta_k Q_k^{\beta_k - 1} = 0, \quad (13)$$

$$AQ^{\alpha} \left[1 + \alpha \frac{Q_k}{Q} \left(1 + \sum_{i=1, i \neq k}^I \frac{F_i}{u_i - F_i} \right) \right] - B_k \beta_k Q_k^{\beta_k - 1} = 0, \quad (14)$$

а условия оптимальности остальных агентов, реагирующих по Курно, имеют вид (9), (10). Систему уравнений (13), (14) также можно решить численно, причем лидерами являются либо последовательно все агенты рынка, либо, в целях упрощения процедуры анализа, исследуются только агенты, имеющие преобладающие доли рынка в ретроспективном периоде, априори предполагая, что более «сильные» агенты в равновесии опережают других в распределении рынка.

¹ Для линейного спроса $Q'_{iQ_k}(Q_i) > 0$ следует из условия $U_i > 0 \forall [\beta_i < 1 \cap 2|b| < B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2}]$; для степенной функции спроса $Q'_{iQ_k}(Q_i) > 0$ может быть только при $F_i < 0 \cap u_i < 0 \cap |u_i| > |F_i|$, что приводит к аналогичному по смыслу соотношению $B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2} > A|\alpha| Q^{\alpha - 1} (1 + (\alpha - 1) Q_i/Q)$.

² Для типичных рынков $U_i < 0 \forall \beta_i > 1 \cup [\beta_i < 1 \cap 2|b| < B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2}]$.

³ Для типичных рынков кривая спроса имеет низкую эластичность ($|\alpha| < 1$), а $F_i > 0$ может быть при условии $\alpha < 1 - Q_i/Q$, что при $Q \gg Q_i$ выполнено только для высокоэластичного спроса.

В частном случае линейных издержек ($\beta_i = 1$) из уравнения (13) следует уравнение реакции лидера по Штакельбергу для линейного спроса

$$Q_k = \frac{a - B_k + bQ_{-k}}{-2b + b(I-1)/2},$$

а из уравнения (14) приближенно (полагая $I \gg 1$) можно выразить реакцию лидера для степенной функции спроса

$$Q_k = \left(AI / \sum_{i=1}^I B_i \right)^{1/(1-\alpha)} - Q_{-k}.$$

Сравнив реакции лидеров по Штакельбергу с уравнениями реакций агентов Курно для представленных частных случаев, отметим тенденцию к асимметрии рыночной структуры в пользу лидера; аналогичный вывод следует из сравнительного анализа реакций (9), (10) с реакциями (13), (14) соответственно.

Равновесие с лидером по Штакельбергу может устанавливаться при наличии системных взаимозависимостей агентов, в частности, в случае имущественной интеграции в форме образования холдинговой структуры с дочерними (зависимыми) организациями, в которой преобладающий на рынке агент выступает в роли собственника капиталов остальных агентов. Равновесие с одним лидером служит основой для разработки моделей равновесия при нескольких лидерах.

Равновесие Штакельберга с несколькими лидерами. Рассмотрим иерархическую модель рынка олигополии, в которой, по аналогии с предыдущим случаем, имеет место асимметричная предположительная информированность, но не один, а несколько агентов-лидеров (обозначены индексом « k ») информированы о том, что остальные агенты (обозначены индексом « i ») выбирают действия по реакциям Курно (9), (10). Возникающая в результате рыночная структура определяется тем, какая из следующих моделей информационного взаимодействия реализуется на верхнем уровне иерархии.

Прежде всего, *классическая модель Штакельберга*, в которой не предполагается взаимное реагирование лидеров, т. е. по отношению друг к другу лидеры являются агентами Курно. При этом реагирование агентов Курно на нижнем уровне (назовем его нулевым уровнем и обозначим число соответствующих агентов I_0) описывается системами уравнений (9), (10), в которых положим $i = 1, \dots, I_0$. Реагирование лидеров, относящихся к высшему (первому) уровню иерархии на действия агентов

нулевого уровня описывается системами уравнений, аналогичными уравнениям (13), (14), в которых полагается $k = 1, \dots, I_1$, где I_1 — число агентов-лидеров первого уровня.

Далее, *модель Штакельберга с информационной рефлексией лидеров*: предполагается, что из множества агентов-лидеров выделяются агенты-лидеры второго уровня (обозначим число соответствующих агентов I_2), информированные о том, что остальные $I_1 = I - I_2 - I_0$ лидеров выбирают действия по неявно заданным реакциям (13), (14) лидеров первого уровня. Проиндексируем лидеров второго уровня символом « m », $m = 1, \dots, I_2$, а индексом « k », $k = 1, \dots, I_1$, как ранее, будем также обозначать лидеров первого уровня. Так формируется двухуровневая модель Штакельберга, в которой множество агентов есть сумма трех подмножеств $I = I_0 + I_1 + I_2$. Выведем уравнение реакции m -го лидера второго уровня на действия k -го лидера первого уровня, считая, что уравнения (13), (14) как неявные функции $Q_k(Q_m)$, $k \neq m$, определяют предположительные вариации действий k -го лидера, исходя из имеющейся у m -го лидера информации:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial Q_m} = \frac{b \left(b Q_k \frac{W_m}{U_m^2} - 1 \right)}{U_k - b^2 \sum_{j=1, j \neq k}^{I_0} \frac{1}{U_j}}, \quad k = 1, \dots, I_1,$$

$$m = 1, \dots, I_2, \quad k \neq m, \quad (15)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial Q_m} = - \frac{F_k + A\alpha Q^{\alpha-2} Q_k \left[\Sigma_1 + Q \frac{F'_m Q_m u_m - W_m F_m}{(u_m - F_m)^2} \right]}{F_k [1 + \Sigma_1] - A\alpha Q^{\alpha-1} [1 + Q_k \Sigma_2] - W_k},$$

$$k = 1, \dots, I_1, \quad m = 1, \dots, I_2, \quad k \neq m, \quad (16)$$

где

$$W_m = W_m(Q_m) = u'_m Q_m = B_m \beta_m (\beta_m - 1) (\beta_m - 2) Q_m^{\beta_m - 3},$$

$$F'_m Q_m = F'_m(Q, Q_m) = A\alpha(\alpha - 1) Q^{\alpha-2} (2 + (\alpha - 2) Q_m / Q), \quad \Sigma_1 = \Sigma_1(F_j, u_j) = \sum_{j=1, j \neq k}^I \frac{F_j}{u_j - F_j},$$

$$F'_i Q_k = F'_i(Q, Q_i) = A\alpha(\alpha - 1) Q^{\alpha-2} (1 + (\alpha - 2) Q_i / Q),$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(F_j, u_j) = \sum_{j=1, j \neq k}^I \frac{F'_j Q_k u_j}{[u_j - F_j]^2}.$$

Отметим, что для линейных функций издержек ($\beta_k = \beta_m = 1$) из выражения (15) следует, что предположительная вариация постоянна и равна значению, полученному из уравнения (9) для агентов Курно при линейном спросе ($Q'_{kQ_m} = -1/2$), а из выражения (16) также следует постоянная предположительная вариация, найденная из уравнения (10) для агентов Курно при степенной функции спроса ($Q'_{kQ_m} = -1$). Поэтому при линейных издержках уравнение реакции m -го лидера второго уровня на действия k -го лидера первого уровня будет идентично уравнениям (13), (14), т. е. образующееся в результате равновесие соответствует классической модели Штакельберга. Следовательно, наличие нелинейных функций издержек служит фактором, обуславливающим специфичность модели Штакельберга с информационной рефлексией лидеров.

Уравнения оптимальных реакций (7), (8) для лидеров второго уровня имеют вид:

$$a + bQ + bQ_m \left(1 - b \sum_{k=1, k \neq m, j}^{I_1} \frac{bQ_m \frac{W_k}{U_k^2} - 1}{U_m - b^2 \sum_{j=1, j \neq k, m}^{I_0} \frac{1}{U_j}} \right) - B_m \beta_m Q_m^{\beta_m - 1} = 0, \quad m = 1, \dots, I_2, \quad (17)$$

$$AQ^\alpha \left[1 + \alpha \frac{Q_m}{Q} \left(1 - \sum_{k=1, k \neq m}^I \frac{F_k + A\alpha Q^{\alpha-2} Q_k \left[\Sigma_1 + Q \frac{F'_m Q_m u_m - W_m F_m}{(u_m - F_m)^2} \right]}{F_k [1 + \Sigma_1] - A\alpha Q^{\alpha-1} [1 + Q_k \Sigma_2] - W_k} \right) \right] - B_m \beta_m Q_m^{\beta_m - 1} = 0, \quad m = 1, \dots, I_2, \quad (18)$$

где суммирование по индексу k соответствует агентам-лидерам первого уровня. Сопоставление реакций (17), (18) лидеров второго уровня с аналогичными соотношениями для лидеров первого уровня (13), (14) показывает усиление асимметрии структуры рынка в пользу лидеров более высокого уровня.

Таким образом, равновесное распределение рынка при тех уровнях иерархии определяется из решения систем уравнений (9), (10) для агентов Курно нулевого уровня (полагая $i = 1, \dots, I_0$), сис-

тем уравнений (13), (14) для лидеров первого уровня (полагая $k = 1, \dots, I_1$) и уравнений (17), (18) для лидеров второго уровня, соответственно заданной функции рыночного спроса. Фактором формирования рыночной системы, в которой каждый агент стремится играть роль лидера, могут стать несогласованные представления агентов об их взаимной рыночной силе.

На рис. 1 представлены информационные взаимодействия и формирующиеся в результате реакции для моделей Штакельберга с одним или несколькими лидерами. Уровни информационной рефлексии $I_0, I_1, \dots, I_N$ (соответствующие уровням лидеров), изображены в пунктирных блоках, агенты (обозначены символами A_j) взаимодействуют по описанным выше реакциям (изображены в оvals), которые обозначены следующим образом: RK — реакции Курно, определяемые системами уравнений (9), (10); $RS_0, RS_2, \dots, RS_{N-2}, RS_N$ — реакции лидеров первого и последующих уровней на действия агентов низших уровней, соответствующие системам уравнений (13), (14); $RS_1, \dots, RS_{N-1}$ — реакции лидеров первого и последующих уровней на действия лидеров того же уровня, определяемые системами уравнений (17), (18). Наивысший (N -й) уровень интерпретируется аналогично единственному лидеру в классической модели Штакельберга, реакция которого на действия остальных агентов определена уравнениями (13), (14); второй уровень информированности I_2 совмещен с уровнем I_{N-1} .

Отметим, что, несмотря на внешнее сходство уровней лидерства с коалициями, внутри множеств агентов на каждом уровне в рассматриваемой модели не предполагается кооперации, поскольку отсутствует информационный обмен, информированность является только предполагаемой и структуры рынка формируются на основе некооперативного равновесия Нэша.

Системы уравнений реакций получены для модели Штакельберга с информационной рефлексией лидеров до второго уровня включительно; для агентов с более высоким уровнем рефлексии реакции могут быть получены аналогично методике вывода уравнений (17), (18). Однако для решения практических задач верификации структур рынков олигополии это нецелесообразно поскольку на рынке олигополии, как правило, действует малое число агентов, (3—5 на реальных рынках), и для развития механизмов рефлексивного поведения необходимо наличие окружения [30], т. е. на каждом уровне должно быть несколько агентов. Поскольку N теоретически (предполагая наличие хотя

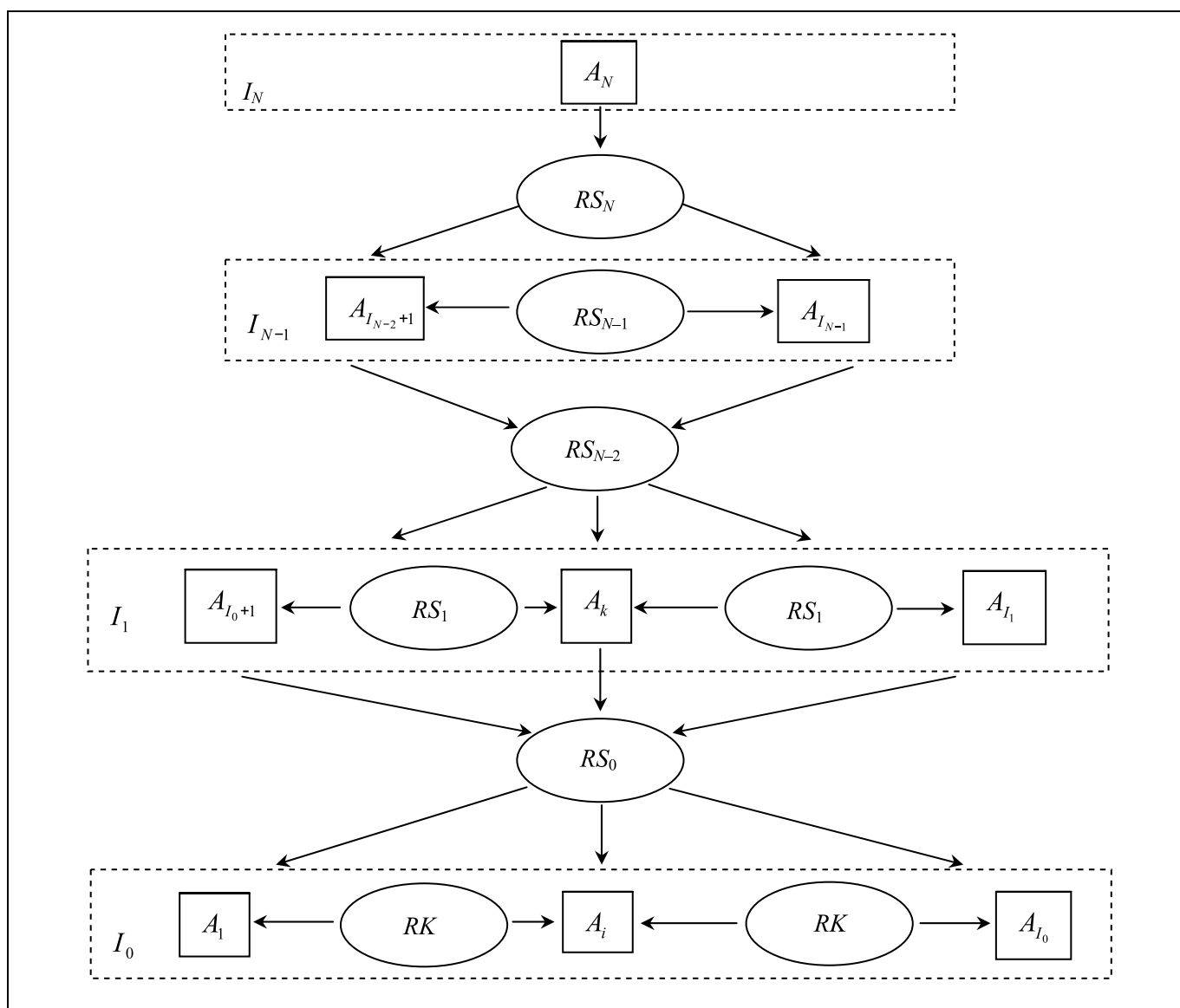


Рис. 1. Схема информационных уровней взаимодействий агентов

бы одного агента на каждом уровне) не может быть больше числа агентов рынка, то на практике глубина рефлексии должна быть существенно меньше ($N \ll I$).

2. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЫНКА И ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ

Примером одной из типичных динамично растущих отраслей экономики в первые десятилетия XXI в. служит телекоммуникационный рынок Российской Федерации, который интенсивно развивается, значительно опережая по темпам роста

другие отрасли экономики. Ежегодный темп роста суммарной абонентской базы операторов рынка [31–34], снизившийся с 70–150 % в 2002–2008 гг. до 2–5 % в 2010–2013 гг., сопровождался стабилизацией темпов роста объемов голосовых услуг на уровне 105–160 % в 2008–2013 гг., демонстрируя тенденцию интенсификации рынка. Тенденция диверсификации рынка проявлялась в структурных изменениях доходов операторов: сокращение доли выручки от голосовых услуг с 76 до 63 % и от передачи сообщений с 7 до 3 % в 2004–2013 гг. сопровождалось ростом доли выручки от интернет-передачи данных с 3 до 19 %.

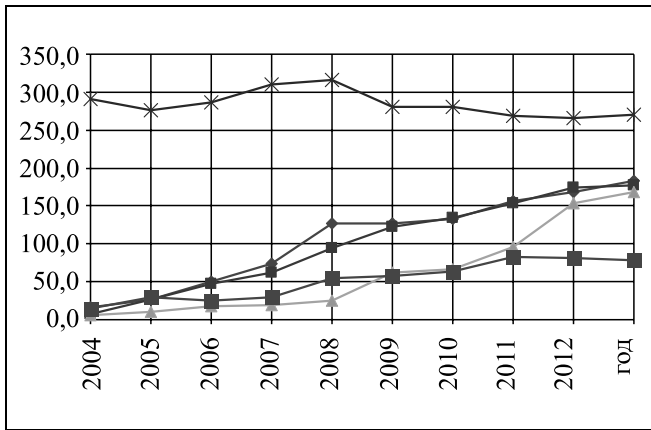


Рис. 2. Динамика голосового трафика операторов рынка мобильной связи России (млрд мин) и индекса Херфиндала — Хиршмана в 2004—2013 гг.: —◆— МТС; —▲— МегаФон; —*— ННН*0,1; —■— «Вымпелком»; —■— другие операторы

Процессы структурирования рынка адекватно отражает индекс Херфиндала — Хиршмана (ННН), определяемый в виде суммы квадратов рыночных долей агентов рынка [35]. Тенденция концентрации рынка, наблюдавшаяся в 2004—2008 гг. исходя из динамики роста ННН (рис. 2) с 2900 до 3150, сменилась стабилизацией индекса в 2009—2013 гг. в диапазоне 2700—2800, характеризуя рынок как устойчивый высококонцентрированный, олигополистический. Телекоммуникационный рынок сформирован взаимодействием трех основных агентов — операторов сотовой связи федерального уровня ОАО «Вымпелком», ОАО «МегаФон», ОАО МТС — занимающих в 2013 г. свыше 80 % рынка; остальную долю занимают региональные операторы, в частности, в дальнейшем будет исследоваться рынок Поволжского региона, на котором преобладает ОАО СМАРТС.

Исследуем динамику цен на телекоммуникационные услуги и показателей издержек агентов рынка в предположении о наличии устойчивых трендов, которые в дальнейшем будем использовать как статические параметры модели рынка. Статистический анализ динамических рядов средневзвешенных цен (на рис. 3 показаны цены в соответствующем году) голосовых услуг P^r (за 1 мин) и интернет-трафика P^u (за 1 Мб), рассчитанных по формулам

$$P^r = \frac{\sum_{i=1}^4 P_i^r Q_i^r}{\sum_{i=1}^4 Q_i^r}, \quad P^u = \frac{\sum_{i=1}^4 P_i^u Q_i^u}{\sum_{i=1}^4 Q_i^u}, \quad (19)$$

показал наличие на рынке РФ степенных и линейных функций цен в различных диапазонах объемов услуг, поэтому определим регрессии в кусочно-заданном виде:

$$\hat{P}^r = \begin{cases} A^r (Q^r)^{\alpha^r}, & Q^r \leq \tilde{Q}^r, \\ a^r + b^r Q^r, & Q^r > \tilde{Q}^r, \end{cases}$$

$$\hat{P}^u = \begin{cases} A^u (Q^u)^{\alpha^u}, & Q^u \leq \tilde{Q}^u, \\ a^u + b^u Q^u, & Q^u > \tilde{Q}^u, \end{cases} \quad (20)$$

где P_i^r и P_i^u — цены голосовых услуг и интернет-трафика i -го агента; $A^r, \alpha^r, a^r, b^r, A^u, \alpha^u, a^u, b^u$ — коэффициенты регрессионных функций аппроксимации спроса; $\tilde{Q}^r, \tilde{Q}^u$ — значения показателей, соответствующие изменению тенденций (млрд. мин, млн. Мб), произошедшему в 2009 г. и выразившемуся в виде резкого роста объемных показателей агентов (на рис. 3 ценовые тренды имеют соответствующие разрывы); Q_i^r и Q_i^u — объемы голосовых услуг и интернет-трафика i -го агента за соответствующий период. Введем индексацию агентов рынка: 1 — ОАО МТС, 2 — ОАО «Вымпелком», 3 — ОАО «МегаФон», 4 — ОАО СМАРТС.

Оценка коэффициентов регрессий (20) по временным рядам цен (19) алгоритмом метода наименьших квадратов, реализованным в процес-

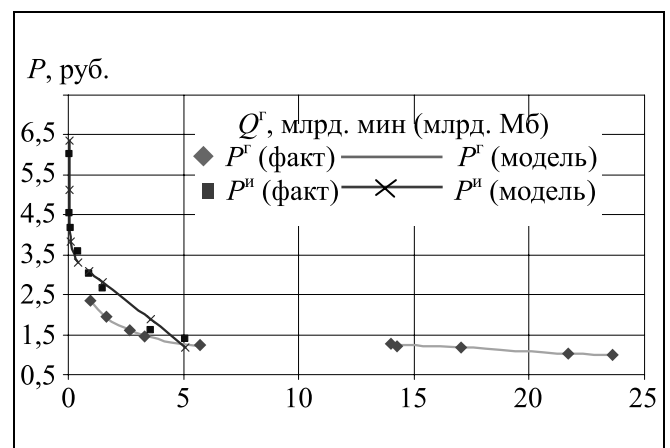


Рис. 3. Фактические ряды цен голосового и интернет-трафика агентов рынка Поволжского региона РФ в 2004—2013 гг. и регрессионные модели

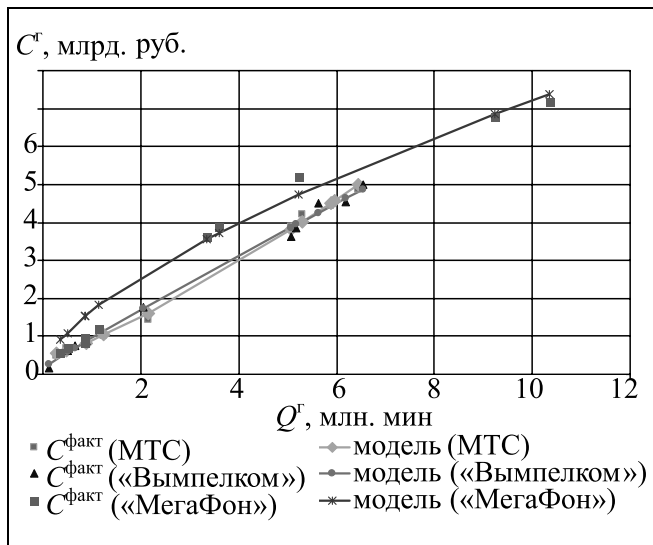


Рис. 4. Фактические зависимости и регрессионные модели издержек на предоставление голосовых услуг агентов рынка Поволжья в 2004–2013 гг.

соре MS Excel, показала следующие регрессии (см. рис. 3):

$$\hat{p}^r = \begin{cases} 2,312(Q^r)^{-0,366}, & Q^r \leq 5,71, \\ 1,623 - 0,027Q^r, & Q^r > 5,71, \end{cases}$$

$$\hat{p}^n = \begin{cases} 34,96(Q^n)^{-0,504}, & Q^n \leq 81,2, \\ 3,507 - 0,0005Q^n, & Q^n > 81,2. \end{cases} \quad (21)$$

Анализ регрессий показывает *линейный характер ценовой динамики рынка* в 2009–2013 гг., а анализ статистических оценок регрессий подтверждает высокие объясняющие характеристики сформированных моделей, их адекватность связи между результирующими показателями и факторами (коэффициент детерминации превышает значение 0,97), их статистическую значимость (критерий Фишера превышает критический уровень).

Определим модели издержек агентов рынка на основе статистического анализа (рис. 3, 4) динамических рядов издержек агентов рынка в Поволжском регионе РФ, сформировав регрессии в виде степенных функций:

$$\hat{C}_i^r(Q) = C_{Fi}^r + B_i^r(Q_i^r)^{\beta_i^r},$$

$$\hat{C}_i^n(Q) = C_{Fi}^n + B_i^n(Q_i^n)^{\beta_i^n}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (22)$$

где $C_i^r(Q)$, $C_i^n(Q)$ — издержки на голосовые услуги и на интернет-передачу i -го агента рынка;

C_{Fi}^r , C_{Fi}^n — постоянные издержки на голосовые услуги и на интернет-передачу i -го агента рынка; B_i^r , B_i^n , β_i^r , β_i^n — коэффициенты регрессий издержек. По моделям (22) сформированы регрессии (рис. 4, 5):

$$\begin{cases} \hat{C}_1^r(Q) = 0,5 + 0,4(Q_1^r)^{1,29}, \\ \hat{C}_2^r(Q) = 0,17 + 0,79(Q_2^r)^{0,95}, \\ \hat{C}_3^r(Q) = 0,1 + 1,6(Q_3^r)^{0,65}, \\ \hat{C}_4^r(Q) = 0,2 + 1,85(Q_4^r)^{2,13}, \\ \hat{C}_1^n(Q) = 22,2 + 23,7(Q_1^n)^{0,56}, \\ \hat{C}_2^n(Q) = 7,46 + 19,25(Q_2^n)^{0,6}, \\ \hat{C}_3^n(Q) = 24,83 + 49,27(Q_3^n)^{0,48}, \\ \hat{C}_4^n(Q) = 20,79 + 11,67(Q_4^n)^{0,6}. \end{cases} \quad (23)$$

Анализ статистических оценок регрессий подтверждает адекватность и статистическую значимость моделей, так как значения коэффициента детерминации превышают уровень 0,97 (кроме значения для C_4^r , равного 0,92), критерий Фишера превышает критический уровень не менее чем в 40 раз (для C_4^r в 16 раз). Анализ регрессионных моделей издержек показывает незначительное влияние постоянных издержек (менее 5 % от издержек на голосовые услуги, менее 1 % от издержек на интернет-трафик) и позволяет выявить

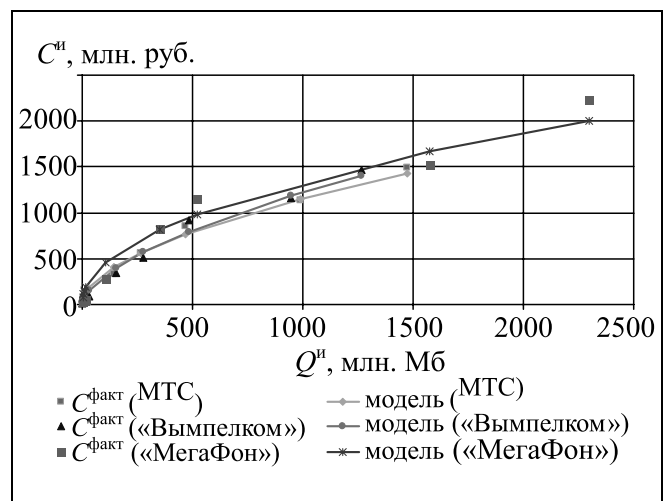


Рис. 5. Фактические зависимости и регрессионные модели издержек на предоставление услуг интернет-связи агентов рынка Поволжья в 2004–2013 гг.

отрицательный эффект расширения масштаба для моделей издержек агентов 2 и 3 на голосовые услуги и *положительный эффект* — для моделей издержек на интернет-трафик всех агентов и издержек агентов 1 и 4 на голосовые услуги.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ

Для выбора наиболее адекватного реальным рыночным условиям равновесия воспользуемся критериями: относительным отклонением от фактических значений равновесной рыночной цены $\Delta \bar{P}$, равновесным объемом рынка $\Delta \bar{Q}$ и рыночных долей $\Delta \bar{Q}_i$, отклонением совокупной прибыли агентов $\Delta \bar{\Pi}$:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \min_{P^r, P^u} \max \Delta \bar{P} = \frac{|P^* - P^{\text{факт}}|}{P^{\text{факт}}}, \\ \Omega_2 &= \min_{Q^r, Q^u} \max \Delta \bar{Q} = \frac{|Q^* - Q^{\text{факт}}|}{Q^{\text{факт}}}, \\ \Omega_3 &= \min_{\Pi^r, \Pi^u} \max \Delta \bar{\Pi} = \frac{|\Pi^* - \Pi^{\text{факт}}|}{\Pi^{\text{факт}}}, \\ \Omega_4 &= \min_{Q_i^r, Q_i^u} \max \Delta \bar{Q}_i = \frac{|Q_i^* - Q_i^{\text{факт}}|}{Q_i^{\text{факт}}},\end{aligned}\quad (24)$$

где P^* , Q^* и Π^* — расчетные значения цены, объема рынка отрасли и прибыли отрасли при равновесном состоянии; $P^{\text{факт}}$, $Q^{\text{факт}}$, $\Pi^{\text{факт}}$ — фактические значения параметров рынка в ретроспективном периоде. Методика оценки адекватности модели рынка олигополии (24) основана на принципе гарантированного результата [36], т. е. выбор адекватной модели осуществляется по комплексному критерию:

$$\Omega = \min_m \max_{m=1, 2, 3, 4} \Omega_m. \quad (25)$$

Рассчитаны следующие равновесные состояния рынка олигополии: равновесие Курно определено путем численного решения системы уравнений (9); равновесие Штакельберга с одним лидером определено из системы уравнений (9) для агентов Курно и уравнения (13) для лидера по Штакельбергу; равновесие в классической модели Штакельберга с несколькими лидерами определено из системы уравнений (9) для агентов Курно и уравнений (13) для лидера по Штакельбергу; равновесие в модели Штакельберга с информационной рефлексией лидеров найдено численным решением системы уравнений (9) для агентов Курно, уравнений (13)

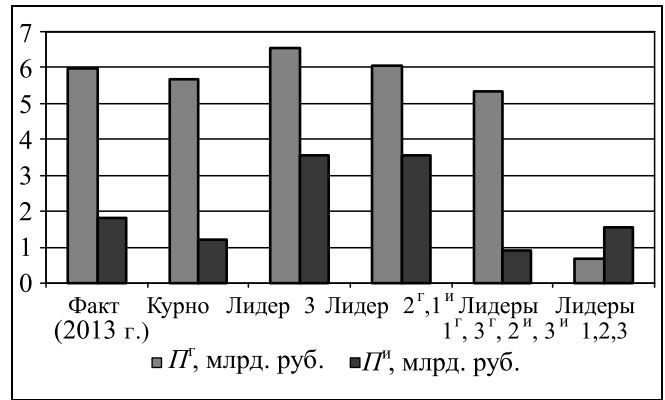


Рис. 6. Суммарная прибыль телекоммуникационного рынка в 2013 г. и расчетные значения при различных моделях за предоставление голосовых услуг («г») и интернет-трафика («и»)

для лидеров первого уровня и уравнений (17) для лидеров второго уровня. При этом учитывались линейные модели регрессий цен (21), соответствующие актуальному ретроспективному периоду 2009—2013 гг., и нелинейные модели регрессий издержек агентов (23).

Проведем анализ моделей равновесия (табл. 1, 2, рис. 6), рассмотрев наиболее вероятные модели состояния рынка с учетом его структурирования в 2013 г. и имеющие наиболее высокие оценки адекватности (24). Наименьший уровень отклонений от фактических в 2013 г. значений объемов услуг (12 % для голосовых услуг и 4 % для интернет-трафика) и цен (9 % для голосовых услуг и 14 % для интернет-трафика) достигается для моделей Курно. Несмотря на то, что модель, в которой лидерами по Штакельбергу являются три преобладающих на рынке агента, для рынка интернет-трафика имеет более высокую точность по равновесной цене (8 %), отклонение рыночных долей двух из трех преобладающих на рынке агентов по модели от фактических значений относительно выше. Модель рынка голосовых услуг с одним лидером 2 по Штакельбергу имеет более высокую точность по объему рынка (3 %) и равновесной цене (1 %), чем модель Курно, однако наличие значительных отклонений (в 2—2,5 раза) рыночных долей двух из трех крупнейших агентов от фактических значений не позволяет признать эту модель адекватной. Анализ относительных отклонений фактической суммарной прибыли рынка в 2013 г. от расчетных значений также приводит к выводу, что модель Курно наиболее адекватна, поскольку отклонения прибыли рынка голосовых услуг составили 5 %, рынка интернет-трафика — 32 %, однако для других моделей максимальное по двум рынкам отклонение существенно выше. Поэтому с учетом це-

Таблица 1

Анализ рынка голосовых услуг

Агент	Показатели в 2013 г.		Модель Курно, $P^Г = 0,91$ руб.			Модель с одним лидером 3, $P^Г = 0,80$ руб.			Модель с одним лидером 2, $P^Г = 1,01$ руб.			Модель с двумя лидерами 1 и 3, $P^Г = 0,87$ руб.			Модель с тремя лидерами 1, 2 и 3, $P^Г = 0,74$ руб.		
	$Q^Г$, млрд мин	$P^Г$, руб.	$Q^Г$, млрд мин	$\Delta \bar{Q}^Г$, %	$\Delta \bar{P}^Г$, %	$Q^Г$, млрд мин	$\Delta \bar{Q}^Г$, %	$\Delta \bar{P}^Г$, %	$Q^Г$, млрд мин	$\Delta \bar{Q}^Г$, %	$\Delta \bar{P}^Г$, %	$Q^Г$, млрд мин	$\Delta \bar{Q}^Г$, %	$\Delta \bar{P}^Г$, %	$Q^Г$, млрд мин	$\Delta \bar{Q}^Г$, %	$\Delta \bar{P}^Г$, %
1	6,44	0,97	4,20	-35	-6	2,98	-54	-17	5,45	-15	4	5,27	-18	-11	5,21	-19	-24
2	6,55	0,99	8,68	33	-8	3,56	-46	-19	16,80	157	2	6,79	4	-12	17,33	165	-26
3	10,35	1,00	13,27	28	-9	23,68	129	-20	0,26	-98	1	15,69	52	-13	10,10	-2	-26
4	0,27	1,05	0,27	1	-13	0,24	-10	-24	0,30	10	-4	0,26	-3	-17	0,23	-16	-30
Всего	23,61	1,00	26,42	-12	-9	30,46	29	-20	22,81	-3	1	28,01	19	-13	32,87	39	-27

Таблица 2

Анализ рынка услуг интернет-передачи

Агент	Показатели в 2013 г.		Модель Курно, $P^И = 1,27$ руб.			Модель с одним лидером 3, $P^И = 1,97$ руб.			Модель с одним лидером 2, $P^И = 1,99$ руб.			Модель с двумя лидерами 1 и 3, $P^И = 1,13$ руб.			Модель с тремя лидерами 1, 2 и 3, $P^И = 1,36$ руб.		
	$Q^И$, млн Мб	$P^И$, руб.	$Q^И$, млн Мб	$\Delta \bar{Q}^И$, %	$\Delta \bar{P}^И$, %	$Q^И$, млн Мб	$\Delta \bar{Q}^И$, %	$\Delta \bar{P}^И$, %	$Q^И$, млн Мб	$\Delta \bar{Q}^И$, %	$\Delta \bar{P}^И$, %	$Q^И$, млн Мб	$\Delta \bar{Q}^И$, %	$\Delta \bar{P}^И$, %	$Q^И$, млн Мб	$\Delta \bar{Q}^И$, %	$\Delta \bar{P}^И$, %
1	1475	1,30	1692	15	-3	79	-95	52	3089	109	53	416	-72	-13	882	-40	5
2	1268	1,50	1389	10	-16	87	-93	31	86	-93	32	2220	75	-25	1711	35	-9
3	2297	1,40	1734	-25	-10	3160	38	41	121	-95	42	2449	7	-19	2026	-12	-3
4	43	1,70	73	68	-26	23	-48	16	22	-49	17	101	132	-34	60	38	-20
Всего	5083	1,48	4888	4	-14	3348	-34	34	3318	-35	35	5186	2	-23	4678	-8	-8



лостности телекоммуникационного рынка следует рассматривать в качестве базовой единую модель Курно для голосовых услуг и интернет-трафика.

Если базироваться на предположении о возможной изолированности рынков голосовых услуг и интернет-трафика, то, применяя критерии (24) и (25) отдельно по каждому рынку, заметим, что модель Курно сохраняет адекватность для рынка голосовых услуг, а для рынка интернет-трафика наиболее адекватной представляется модель Штакельберга с тремя лидерами. Прибыль интернет-рынка, рассчитанная в последнем случае, выше аналогичного показателя для модели Курно и отличается от фактического показателя рынка лишь на 14 %. Экономически это означает, что в традиционном сегменте голосовых услуг рыночная структура стабилизировалась, а центр тяжести конкурентной борьбы преобладающих агентов перенесен на развивающийся рынок интернет-трафика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Структуры реальных рынков олигополии, модели которых ранее строились на основе линейных функций спроса и издержек агентов, исследованы с помощью линейных и степенных функций спроса при нелинейных функциях издержек в целях повышения точности идентификации рыночных равновесий. Разработаны аналитические модели неиерархической рыночной структуры при реагировании по Курно, а также иерархических структур в виде асимметричного равновесия с лидером по Штакельбергу и равновесия по Штакельбергу с информационной рефлексией лидеров.

Неиерархическая рыночная структура типа Курно характеризуется асимметричным распределением рыночных долей, причем перераспределение рынка направлено в пользу агентов с меньшими темпами роста функций издержек. Однако при моделировании реальных рынков возникающая асимметрия незначительна в силу несущественности влияния на равновесную структуру компонента издержек по сравнению с компонентом спроса из-за количественной несоизмеримости параметров этих функций, а также вследствие незначительных различий между темповыми параметрами функций издержек преобладающих агентов, производящих идентичный товар и поэтому использующих типовые технологии.

Иерархическая рыночная структура типа Штакельберга предопределяет существенно большую асимметрию распределения рынка между агентами вследствие дополнительного влияния на устанавливаемое равновесие суммы предположительных вариаций, сопоставимой по размеру с па-

раметрами функции спроса. Введение нелинейных функций издержек в разработанные модели реакций агентов позволило учесть влияние эффекта расширения масштаба агента на предположительные вариации: переменный характер предположительных вариаций отражает воздействие сложившейся структуры рынка и технологий агентов (функций издержек) на интенсивность реагирования агентов. Формирующая в результате равновесная рыночная структура должна быть смещена в пользу агентов высшего уровня предположительной информированности и перераспределена между агентами низшего уровня информированности в пользу имеющих положительный эффект расширения масштаба. В случае равновесия Штакельберга с информационной рефлексией лидеров влияние предположительных вариаций еще более усиливается, из-за чего рынок существенно перераспределяется в пользу лидеров более высокого уровня информированности.

В контексте решения практической задачи выбора стратегий фирм на рынках олигополии разработанный комплекс моделей позволяет путем варьирования типов реакций и уровней предположительной информированности построить формализованное описание равновесия для различных симметричных и асимметричных реальных рыночных структур.

Моделирование динамики показателей телекоммуникационного рынка Поволжья показало его олигополистическое состояние, подтвердило наличие степенных функций цен на раннем этапе развития и линейных функций цен в последние годы, позволило сформировать функции издержек агентов, характеризующиеся различными эффектами расширения масштаба. Численный анализ равновесий, сформированных на основе разработанных моделей реагирования агентов, показал, что наиболее адекватной среди рассмотренных моделей реагирования в контексте ситуации, сложившейся на телекоммуникационном рынке Поволжья в 2013 г., является модель Курно, что косвенно свидетельствует о стабилизации действий агентов в условиях устойчивого распределения рынка. Исходя из этого можно предположить, что информационная рефлексия перестала значимо влиять на повышение прибыли агентов рынка в отличие от фазы резкого объемного роста и перераспределения рыночных долей между агентами в 2004—2008 гг.; поэтому перспективной стратегией агентов видится перераспределение рынка путем усовершенствования технологий в целях повышения эффекта масштаба до уровня, уже достигнутого на интернет-рынке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowley A.L. The Mathematical Groundwork of Economics. — Oxford: Oxford University Press, 1924.
2. Perry M.K. Oligopoly and Consistent Conjectural Variations // Bell Journal of Economics. — 1982. — Vol. 13, N 1. — P. 197—205.
3. Bresnahan Timothy F. Duopoly Models with Consistent Conjectures // The American Economic Review. — 1981. — Vol. 71, N 5. — P. 934—945.
4. Булавский В.А., Калашиников В.В. Равновесие в обобщенных моделях Курно и Штакельберга // Экономика и математические методы. — 1995. — Т. 31, вып. 3. — С. 5—33.
5. Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I., and Castillo F.J. Mixed oligopoly with consistent conjectures // European Journal of Operational Research. — 2011. — Vol. 210, iss. 3. — P. 729—735.
6. Дмитриенко К.Ю. Моделирование оптимального поведения фирмы на рынке олигополии при условии неценовой дифференциации товара // Вестник НГУ. Сер.: Социально-экономические науки. — 2009. — Т. 9, вып. 1. — С. 45—53.
7. Мицель А.А., Козлов С.В. Модели олигополии // Известия Томского политехн. ин-та. Экономика. — 2006. — Т. 311, № 6. — С. 4—8.
8. Филатов А.Ю. Развитие модели бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса // Равновесные модели экономики и энергетики: Тр. Всерос. конф. и секции Математической экономики XIII Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005.
9. Каверина И.А., Каверин С.В. Стратегии оптимального ценообразования в условиях олигополии с лидером // Педагогическая инноватика: инновационное образование, инновационное мышление, инновации. — Балашиха: ИСЭПМ, 2010. — С. 6—16.
10. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. — М.: Вега-Инфо, 2009.
11. Гриценко, Д.В. Динамическая эффективность равновесий Курно и Бертрана в дифференцированной олигополии в условиях конкуренции в области инновационных разработок // Экономические науки. — 2009. — № 5. — С. 312—318.
12. Понькина Е.В., Маничева А.С., Комаров П.В. Модель расщепленного рынка с барьерами на вход // Управление, вычислительная техника и информатика. — 2010. — С. 66—78.
13. Гонтарев А.В., Чхартишвили А.Г. О явных и скрытых коалициях в рефлексивных играх // Управление большими системами. — 2008. — Вып. 26. — С. 46—63.
14. Лукашина Е.В. Моделирование стратегической торговой политики на международном рынке с вертикальными связями // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. — 2010. — Вып. 2 (22). — С. 10—16.
15. Калинин В.И. Моделирование и оптимизация стратегий развития рекреационно-туристских территорий // Экономический вестник Ростовского государственного университета. — 2009. — Т. 7, вып. 3. — С. 56—59.
16. Белгарян А.В., Булавский В.А. Модель олигополии при наличии постоянных затрат // Экономика и математические методы. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 124—127.
17. Акопов А.С. Модель двухпродуктовой олигополии, описывающая взаимодействие нефтяных компаний на внутреннем рынке // Аудит и финансовый анализ. — 2004. — № 1. — С. 56—67.
18. Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Модели несовершенной конкуренции применительно к анализу электроэнергетического рынка Сибири // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2013. — № 2 (18). — С. 62—88.
19. Albinger J. Economic model for monopoly analysis in telecommunication: proposal to demonstrate uniqueness // Business Intelligence Journal. — 2009. — Vol. 2, N 1. — URL: <http://www.saycocorporativo.com/saycoUK/BIJ/journal/Vol2No1/article2.pdf> (дата обращения 07.09.2015).
20. Yu S.M., Kim S.-L. Price War in Wireless Access Networks: A Regulation for Convergence // Global Telecommunications Conference. GLOBECOM. IEEE — GLOBECOM, 2011. — P. 1—5.
21. De Mesnard L. Is the French mobile phone cartel really a cartel? — URL: <https://ideas.repec.org/p/lat/legeco/e2009-02.html> (дата обращения 07.09.2015).
22. Miao M., Xiong F., Zhou J. Game among mobile operators, bank and the third-party payment services providers in mobile payment market // Intern. Journal of u- and e-Service, Science and Technology. — 2014. — Vol. 7. — N 1. — P. 177—188.
23. Ke-fei Liu K.-F., Zhao R. Co-competition game analysis of mobile communication market after company restructuring // Proc. of the 2012 Intern. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Xian. — 15—17 July, 2012. — P. 654—659.
24. Patinkin, D. John Maynard Keynes in The New Palgrave Dictionary of Economics. Macmillan. — 1997. — Vol. 3. — P. 25.
25. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Введение в теорию управления организационными системами. — М.: Кн. дом «Либроком», 2009.
26. Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. — М.: Дело, 2000.
27. Гераськин М.И., Кореева Е.Б., Кузнецов М.И. Модели согласования экономических интересов агентов на рынке сотовой связи Самарской области // Terra Economicus. (Экономический вестник Ростовского гос. ун-та.). — 2008. — Т. 6. — № 4, ч. 2. — С. 278—285.
28. Дюсуше О.М. Статичное равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал ВШЭ. — 2006. — № 1. — С. 3—32.
29. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: Макс Пресс, 2005. — 272 с.
30. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. — М.: СИНТЕГ, 2003. — 160 с.
31. Раскрытие информации: — URL: <http://corp.megafon.ru/investors/disclosure/> (дата обращения 07.09.2015).
32. VimpelCom Annual reports. — URL: <http://vimpelcom.com/#Investor-relations/Reports—results/Annual-reports/> (дата обращения 07.09.2015).
33. Финансовая отчетность. — URL: <http://www.company.mts.ru/comp/ir/report/> (дата обращения 07.09.2015).
34. Годовые отчеты компании. Отчетность / СМАРТС — сотовый оператор. Самара, 2014. — URL: <http://rus.smarts.ru/accounting/year/> (дата обращения 07.09.2015).
35. Фран Р.Х. Микроэкономика и поведение. — М.: Инфра-М, 2000.
36. Махулин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. — М.: Наука, 1986.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Гераськин Михаил Иванович — д-р экон. наук, зав. кафедрой, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет),
✉ innovation@ssau.ru,

Чхартишвили Александр Гедванович — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ sandro_ch@mail.ru.