УДК 519.876.2

МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В АКТИВНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ЦЕНТРА[1]

Д.Н. Федянин, А.Г. Чхартишвили

Дан анализ модели информационного управления в сетевых структурах. Показана зависимость результата информационного управления как от информированности управляющего органа (центра), так и от влиятельностей элементов сетевой структуры (агентов). Исследован вопрос о более выгодных для центра структур.

Ключевые слова: активная сетевая структура, влиятельность агентов, неполная информированность, информационное управление.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к исследованию сетевых структур, в частности, — к задачам информационного управления в активных[2] сетевых структурах (см. например, работы [2, 3], а также обзор [4]). Это вызвано двумя обстоятельствами.

Прежде всего, в активных сетевых структурах, в отличие от иерархических, отсутствует подчиненность одних элементов (далее будем называть их *агентами*) другим. Это существенно ограничивает возможность применения детально исследованных моделей и механизмов (см., например, работу [5]) управления в иерархических (в частности, организационных) структурах.

Далее, широкое развитие информационных технологий, в частности, Интернета, и различных онлайновых сетевых структур (социальные сети, блоги) существенно изменило и продолжает изменять среду социального и экономического взаимодействия. К чему приведут эти изменения, сейчас сказать трудно, хотя исследователи пытаются делать прогнозы в экономике [6] и политике [7]. Отметим также, что отдельный раздел о сетевых структурах, по-видимому, в недалеком будущем появится в учебниках по экономической теории (пример — книга [8]).

Агенты действуют с учетом своей информированности, которая, следовательно, выступает важным аспектом моделируемой ситуации. Информационное управление в активных сетевых структурах состоит в формировании у агентов такой информированности, которая наиболее благоприятна для управляющего органа (*центра*). Достаточно общая постановка задачи информационного управления в сетевых структурах приведена в работах [2, 9—11], однако в них предполагается полная информированность центра. В данной статье (предварительной версией которой была публикация [12]) рассмотрено информационное управление в условиях неполной информированности центра.

Используемая в работе модель, часто называемая моделью де Гроота, построена на идеях, изложенных в работе [13] и развитых впоследствии в большом числе исследований — например, [14—20]. Мы будем называть модель *марковской*, поскольку описывающие динамику мнений агентов соотношения аналогичны соотношениям, описывающим динамику состояний марковской цепи.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31367).

[2] Активными называются структуры, элементы которых (как правило, люди и коллективы) обладают собственными интересами и определенной свободой действий — см., например, книгу [1].

1. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЛИЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Рассмотрим марковскую модель более подробно. Пронумеруем агентов, входящих в сетевую структуру (для краткости будем также называть ее сетью), натуральными числами от 1 до n и обозначим множество агентов $N = \{1, 2, ..., n\}$. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается *матрицей прямого влияния* A (матрицей пересчета вероятностей в терминах цепей Маркова) размерности $n \times n$, где $a_{ij} \geqslant 0$ обозначает степень доверия i-го агента j-му агенту. Здесь и далее мы будем говорить как о влиянии, так и о доверии, и считать, что эти два понятия противоположные в следующем смысле: выражение «степень доверия i-го агента j-му равна a_{ij}» тождественно по смыслу выражению «степень влияния j-го агента на i-го равна a_{ij}».

Будем считать выполненным условие нормировки: $\forall i \in N \sum_{j \in N} a_{ij} = 1$, т. е. предположим, что «суммарное доверие» агента равно единице. Это условие означает, что матрица A стохастическая по строкам. Отметим, что агент может доверять и самому себе, чему соответствует $a_{ii} > 0$.

Пусть у каждого агента в некий начальный момент времени имеется информированность (мнение) по некоторому вопросу. Мнение i-го агента отражает вещественное число x_i^0, $i \in N$, мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец мнений x^0 размерности n. В соответствии с марковской моделью агенты в сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет. Это изменение будем считать линейным, т. е. положим, что мнение агента в следующий момент времени представляет собой взвешенную сумму мнений агентов, которым он доверяет (весами служат степени доверия a_{ij}):

$$x_i^\tau = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^{\tau - 1}, \quad i \in N.$$

Если информационное взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются — сходятся к результирующему мнению $x^\infty = \lim_{\tau \to \infty} x^\tau$.

Предел $A^\infty = \lim_{\tau \to \infty} A^\tau$ существует при довольно слабых условиях (подробнее см., например, работы [2, 4, 10]), которые далее будем считать выполненными, и называется *матрицей результирующего влияния*. Используя этот предел, можно записать соотношение $x^\infty = A^\infty x^0$, где x^0 — вектор начальных мнений, A^∞ — матрица результирующего влияния, x^∞ — вектор итоговых мнений.

Матрица результирующего влияния позволяет определить *влиятельность* каждого агента — суммарное итоговое доверие всех агентов данному. Другими словами, влиятельностью j-го агента служит величина $w_j = \sum_{i \in N} a_{ij}^\infty$.

Поскольку матрица A^∞ стохастическая, для влиятельностей агентов справедливо соотношение:

$$\sum_{j \in N} w_j = n. \tag{1}$$

Изложив известные результаты исследования марковской модели, перейдем к постановке задачи управления. Пусть помимо агентов существует управляющий ими орган — центр, который стремится достичь максимального суммарного значения характеристик агентов $\sum_{j \in N} x_j^\infty$. Пусть, далее, он имеет возможность оказывать на агентов в начальный момент времени управляющие воздействия u_i, изменяющие их характеристики. Тогда суммарное итоговое изменение характеристик агентов (здесь $u = (u_1, ..., u_n)$):

$$F(u) = \sum_{j \in N} (A^\infty u)_j = \sum_{j \in N} \left(\sum_{i \in N} a_{ij}^\infty\right) u_j = \sum_{j \in N} w_j u_j. \tag{2}$$

Функция $F(u)$ из соотношения (2) представляет собой функцию полезности центра, которую он стремится максимизировать. Видно, что при ограниченных ресурсах на управление (например, если из n компонент вектора u лишь k могут быть отличны от нуля) центру следует воздействовать на агентов с большей влиятельностью. Это даст ему больший итоговый выигрыш.

Далее будем рассматривать (при различных вариантах информированности центра) следующую ситуацию: центр может оказать управляющее воздействие, равное 1, на k агентов, $1 \leqslant k < n$. Нас будут интересовать два вопроса:

— каково оптимальное управляющее воздействие центра?

— какие сетевые структуры для центра наиболее и наименее выгодные?

В случае полной информированности о влиятельностях агентов центру следует, как уже было отмечено, воздействовать на k наиболее влиятельных агентов. Выгодность для центра будем понимать в смысле максимизации его функции полезности (2).

Далее нам потребуется

Лемма. *Для любого натурального числа n и любых неотрицательных действительных чисел* w_i, $i \in N = \{1, ..., n\}$, *таких что* $\sum_{i \in N} w_i = n$, *существует такая матрица влияния, что влиятельность i-го агента будет равна* w_i.

Доказательство. Пусть заданы натуральное число n и неотрицательные действительные числа w_i, $i \in N = \{1, ..., n\}$, такие что $\sum_{i \in N} w_i = n$. Построим матрицу A с элементами $a_{ij} = w_j/n$. Она является стохастической матрицей и, следовательно, может быть матрицей прямого влияния в некоторой сети. В то же время, как легко убедиться, она инвариантна относительно операции умножения на себя:

$$\sum_{k \in N} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k \in N} \frac{w_k}{n}\frac{w_j}{n} = \frac{w_j}{n^2}\sum_{k \in N} w_k = \frac{w_j}{n} = a_{ij}.$$

Поэтому $A^\infty = A$, и влиятельности агентов

$$\sum_{i \in N} a_{ij} = \sum_{i \in N} \frac{w_j}{n} = \frac{w_j}{n}\sum_{i \in N} 1 = w_j.$$

Таким образом, матрица A — искомая матрица влияния. ♦

Теперь мы можем доказать утверждения, описывающие наиболее и наименее выгодные для центра сети.

Утверждение 1а. *В случае полной информированности наиболее выгодна для центра сеть, в которой влиятельности не более чем k агентов отличны от нуля.*

Доказательство. Максимальное значение функции полезности центра (2) равно n:

$$F = \sum_{j \in N} w_j u_j \leqslant \sum_{j \in N} w_j = n.$$

Достигается это значение в том случае, когда $u_j = 1$ для всех j, таких что $w_j > 0$. ♦

Наименее выгодную сеть описывает

Утверждение 1б. *В случае полной информированности существует единственная наименее выгодная для центра сеть, а именно та, при которой влиятельности всех агентов одинаковы:*

$$w_1 = ... = w_n = 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Предположим, что существует сеть, для которой условие (3) не выполнено, и при этом она является наименее выгодной для центра. Не ограничивая общности, перенумеруем агентов в порядке невозрастания влиятельностей. Для этой сети $w_1 > w_n$, поэтому существует такой номер $l \in N$, что

$$w_1 = ... = w_l > w_{l+1} \geqslant ... \geqslant w_n. \qquad (4)$$

Тогда в силу леммы можно построить сеть с меньшими влиятельностями первых l агентов и одновременно большими влиятельностями агентов с номерами от $l + 1$ до n включительно (с сохранением соотношений (1) и (4)). Для такой сети значение целевой функции центра будет меньше, чем в исходной сети, что противоречит тому, что исходная сеть наименее выгодная для центра.

2. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕИНФОРМИРОВАННОМ ЦЕНТРЕ

Рассмотрим сетевую структуру, динамика которой задается марковской моделью. В отличие от рассмотрений § 1 будем считать, что центр не знает о влиятельностях конкретных агентов, поэтому оказывает одинаковые управляющие воздействия, равные 1, на k случайно выбранных агентов из n, $1 < k < n$. Как и ранее, центр заинтересован в максимизации суммы итоговых характеристик агентов.

В рассматриваемом случае неинформированного центра величины u_i, $i = 1, ..., n$, являются случайными. Каждая из них принимает значения 0 либо 1, при этом $\sum_{i \in N} u_i = k$.

Поскольку воздействие осуществляется на k случайно выбранных агентов из n, вероятность события $u_i = 1$ (т. е. вероятность того, что именно на данного агента осуществлено единичное воздействие) составляет k/n, так же как и математическое ожидание: $p(u_i = 1) = \mathrm{E}u_i = k/n$.

Полезность центра $F = \sum_{j \in N} w_j u_j$ также величина случайная. Находя ее математическое ожидание, получаем (в силу свойства линейности операции нахождения математического ожидания):

$$\mathrm{E}F = \mathrm{E}\Big(\sum_{j \in N} w_j u_j\Big) = \sum_{j \in N} w_j \mathrm{E}(u_j) = $$
$$= \frac{k}{n}\sum_{j \in N} w_j = \frac{k}{n} n = k.$$

Таким образом, математическое ожидание выигрыша центра не зависит от значений влиятельностей агентов. Иными словами, в среднем центр получает один и тот же результат вне зависимости от того, каковы взаимные влияния агентов друг на друга. Заметим, что этот результат совпадает с наименее благоприятным (среди всевозможных сетевых структур) для рассмотренного в § 1 случая полной информированности центра.

Помимо математического ожидания, важнейшей характеристикой полезности центра служит ее дисперсия. Обычно предполагается, что осуществляющий управление рациональный субъект, принимающий решение в условиях неопределенности, стремится минимизировать дисперсию. Поэтому будем считать, что в данном случае для центра предпочтительна низкая дисперсия.

Утверждение 2. *В случае неинформированного центра наиболее выгодная для него (в смысле минимизации дисперсии полезности) сеть, в которой влиятельности всех агентов одинаковы; наименее выгодная сеть, когда в сетевой структуре имеется единственный элемент, обладающий ненулевой влиятельностью.*

Доказательство. Поскольку случайные величины u_i, $i = 1, ..., n$, попарно зависимые, дисперсия $\mathrm{D}F$ полезности центра вычисляется следующим образом (см., например, книгу [21]):

$$\mathrm{D}F = \mathrm{D}\Big(\sum_{i \in N} w_i u_i\Big) = \sum_{i \in N} w_i^2\,\mathrm{D}(u_i) + 2\sum_{i > j} w_i w_j \operatorname{cov}(u_i, u_j). \quad (5)$$

Дисперсия величин u_i, $i = 1, ..., n$, $\mathrm{D}u_i = \mathrm{E}(u_i^2) - \mathrm{E}^2(u_i) = k/n - (k/n)^2$.

Случайное произведение $u_i u_j$ принимает значение 1 либо 0. Его математическое ожидание, равное вероятности значения 1,

$$\mathrm{E}(u_i u_j) = p(u_i u_j = 1) = p(u_j = 1)p(u_j = 1|u_i = 1) = \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}$$

(здесь $p(A|B)$ означает условную вероятность события A при происшедшем событии B). Поэтому

$$\operatorname{cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}[(u_i - \mathrm{E}u_i)(u_j - \mathrm{E}u_j)] = \mathrm{E}u_i u_j - (\mathrm{E}u_i)^2 = \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1} - \Big(\frac{k}{n}\Big)^2.$$

Подставляя в формулу (5) значения $\mathrm{D}u_i$ и $\operatorname{cov}(u_i, u_j)$, получаем

$$\mathrm{D}F = \sum_i w_i^2 \cdot \frac{k}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big) + 2\sum_{i>j} w_i w_j \frac{k}{n}\cdot\Big(\frac{k-1}{n-1} - \frac{k}{n}\Big) = \frac{k(n-k)}{n^2}\Big(\sum_i w_i^2\Big) - \frac{2k(n-k)}{n^2(n-1)}\Big(\sum_{i<j} w_i w_j\Big).$$

Последнее выражение может быть записано более наглядно, если воспользоваться алгебраической формулой

$$\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = (n-1)\sum_{i \in N} w_i^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j. \quad (6)$$

Поскольку общее число слагаемых в левой части формулы (6) составляет $n(n - 1)/2$, введем в рассмотрение величину Δ, равную среднему квадрату разности влиятельностей несовпадающих агентов:

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2.$$

С учетом этого обозначения, а также формулы (5), выражение для дисперсии можно записать следующим образом:

$$\mathrm{D}F = \frac{k(n-k)}{2n}\Delta.$$

Видно, что дисперсия $\mathrm{D}F$ достигает минимального значения (n и k считаем фиксированными) при $\Delta = 0$, т. е. в случае, когда влиятельности всех агентов одинаковы.

Далее будем считать, не ограничивая общности, что агенты упорядочены по невозрастанию влиятельностей: $w_1 \geqslant ... \geqslant w_n$.

Для нахождения максимального значения $\mathrm{D}F$ достаточно показать, что максимальное значение Δ равно $2n$ и достигается при

$$w_1 = n, \quad w_i = 0, \quad i > 1, \quad (7)$$

(содержательно это означает, что все влияние в сетевой структуре сосредоточено у одного агента).

Действительно, справедливо соотношение

$$n^2 = \Big(\sum_{i \in N} w_i\Big)^2 = \sum_{i \in N} w_i^2 + 2\sum_{i>j} w_i w_j,$$

откуда

$$\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = (n-1)\sum_{i \in N} w_i^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j = (n-1)\Big(n^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j\Big) - 2\sum_{i>j} w_i w_j = n^2(n-1) - 2n\sum_{i>j} w_i w_j.$$

Если выполняется соотношение (7), то правая часть последнего выражения принимает максимальное значение, равное $n^2(n - 1)$. При этом

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = \frac{2}{n(n-1)} n^2(n-1) = 2n.$$

Таким образом, максимальное значение $\mathrm{D}F$ равно $k(n - k)$ и достигается в случае, когда в сетевой структуре имеется единственный элемент, обладающий ненулевой влиятельностью. ♦

3. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ЧАСТИЧНО ИНФОРМИРОВАННОМ ЦЕНТРЕ

В данном разделе мы рассмотрим ситуацию частичной информированности центра: сетевая структура разбита на непересекающиеся *информационные подмножества*, внутри каждого из которых центр не различает агентов, однако для каждого подмножества знает число агентов и их суммарную влиятельность.

Обозначим информационные подмножества через G_i, $i \in M = \{1, 2, ..., m\}$:

$$G_1 \cup ... \cup G_m = N.$$

Стратегия центра в данном случае состоит в выборе объема воздействия на каждое информационное подмножество, т. е. числа агентов k_i из подмножества G_i, $i \in M$, на которое он оказывает управляющее воздействие (при этом в каждом подмножестве центр поддерживает случайно выбранных агентов). Суммарное число агентов по-прежнему считаем равным k, а каждое k_i, разумеется, не превосходит числа агентов n_i в информационном подмножестве G_i:

$$\sum_{i \in M} k_i = k, \quad k_i \leqslant n_i, \quad i \in M.$$

Как и в случае неинформированного центра, его полезность является случайной величиной. Найдем ее математическое ожидание:

$$\mathrm{E}F = \mathrm{E}\Big(\sum_{j \in N} w_j u_j\Big) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i \in M} \sum_{j \in G_i} w_j u_j\Big) =$$
$$= \sum_{i \in M} \sum_{j \in G_i} w_j \mathrm{E}(u_j) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in G_i} w_j \frac{k_i}{n_i} =$$
$$= \sum_{i \in M} k_i \Big(\frac{1}{n_i} \sum_{j \in G_i} w_j\Big) = \sum_{i \in M} k_i \bar{w}_i, \qquad (8)$$

где через $\bar{w}_i$ обозначена средняя влиятельность агентов, входящих в подмножество G_i.

Из соотношения (8) (которое, заметим, аналогично соотношению (2)) видно, что центру следует воздействовать на подмножества с максимальной средней влиятельностью. Наиболее выгодную для центра сеть описывает

Утверждение 3а. *В случае частичной информированности наиболее выгодная для центра сеть, когда суммарное число агентов в информационных подмножествах, средняя влиятельность в которых отлична от нуля, не превосходит k.*

Доказательство. Максимальное значение ожидаемой полезности центра (8)

$$\mathrm{E}F = \sum_{i \in M} k_i \bar{w}_i = \sum_{i \in M} \frac{k_i}{n_i} \sum_{j \in G_i} w_j \leqslant \sum_{i \in M} \sum_{j \in G_i} w_j = \sum_{j \in N} w_j = n.$$

Значение n достигается в том случае, когда $k_i = n_i$ для всех $i \in M$, таких что $\bar{w}_i > 0$. ♦

Наименее выгодную сеть описывает

Утверждение 3б. *В случае частичной информированности существует единственная наименее выгодная для центра сеть, а именно та, в которой средние влиятельности во всех информационных подмножествах одинаковы:*

$$\bar{w}_1 \geqslant \ldots \geqslant \bar{w}_m = 1. \qquad (9)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, перенумеруем подмножества в порядке невозрастания средних влиятельностей: $\bar{w}_1 \geqslant \ldots \geqslant \bar{w}_m$.

Предположим, что существует сеть, для которой условие (9) не выполнено, и при этом она наименее выгодная для центра. Для этой сети $\bar{w}_1 > \bar{w}_m$, поэтому существует такой номер $l \in M$, что

$$\bar{w}_1 = \ldots = \bar{w}_l > \bar{w}_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \bar{w}_n. \qquad (10)$$

Тогда в силу леммы можно построить сеть с меньшими средними влиятельностями первых l информационных подмножеств и одновременно большими средними влиятельностями остальных подмножеств с номерами от $l + 1$ до n включительно (с сохранением соотношений (1) и (10)). Для такой сети значение целевой функции центра будет меньше, чем в исходной сети, что противоречит тому, что исходная сеть наименее выгодная для центра. ♦

Отметим, что утверждения 3а и 3б представляют собой, по сути, обобщения утверждений 1а и 1б соответственно, поскольку информационные подмножества могут трактоваться как «макроагенты» со средней по множеству влиятельностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена модель информационного управления в активной сетевой структуре в случае, когда воздействие центра на агента может либо отсутствовать, либо быть равным одинаковой для всех агентов величине. На основе модели были сделаны следующие выводы относительно предпочтительности для центра тех или иных структур.

- В случае полной информированности наиболее выгодная для центра сеть, в которой отличны от нуля влиятельности лишь тех агентов, на которых он может воздействовать; наименее выгодная для центра сеть, в которой влиятельности всех агентов одинаковы.
- В случае неинформированного центра наиболее выгодная для него сеть, в которой влиятельности всех агентов одинаковы; наименее выгодная сеть, когда в сетевой структуре имеется единственный элемент, обладающий ненулевой влиятельностью.
- В случае частично информированного центра наиболее выгодная для него сеть, в которой суммарное число агентов в информационных подмножествах, средняя влиятельность в которых отлична от нуля, не превосходит числа агентов, на которых он может воздействовать; наименее выгодная для центра сеть, в которой средние влиятельности во всех информационных подмножествах одинаковы.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется анализ различных вариантов информированности центра и их влияния на эффективность информационного управления в активных сетевых структурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 256 с.
2. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
3. *Jackson M.* Social and Economic Networks. — Princeton: Princeton University Press, 2008. — 520 p.
4. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели влияния в социальных сетях // Управление большими системами. — 2009. — Вып. 27. — С. 205—281.
5. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В.* и др. Механизмы управления / Под ред. Д.А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2011. — 192 с.
6. *Долгин А.* Манифест новой экономики. Вторая невидимая рука рынка. — М.: АСТ, 2010. — 224 с.
7. *Волков Ф., Крашенинников П.* Облачная демократия. Екатеринбург, октябрь 2010 — май 2011 г. — URL: cdem.ru (дата обращения 23.08.2012).
8. *Кузьминов Я.И., Бендукидзе К.А., Юдкевич М.М.* Курс институциональной экономики: институты, сети, трансакционные издержки, контракты. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. — 442 с.
9. *Барабанов И.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Динамические модели информационного управления в социальных сетях // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 11. — С. 172—182.
10. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 28—35.
11. *Зуев А.С., Федянин Д.Н.* Модели управления мнениями агентов в социальных сетях // Проблемы управления. — 2011. — № 1. — С. 37—45.
12. *Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.* Об одной модели стохастического информационного управления в активных сетевых структурах // Тр. Междунар. науч.-практ. конф. (14—16 ноября 2011 г., Москва). Общ. ред. В.Н. Бурков, Д.А. Новиков / ИПУ РАН. — М., 2011. — Т. 2. — С. 290—292.
13. *French Jr., John R.P.* A formal theory of social power // The Psychological Review. — 1956. — Vol. 63, iss. 3. — P. 181—194.
14. *Harary F.* A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power / Studies in Social Power. — Michigan: Institute of Sociological Research, 1959. — P. 168—182.
15. *DeGroot M.H.* Reaching a consensus // J. Amer. Statist. Assoc. — 1974. — Vol. 69. — P. 118—121.
16. *Berger R.L.* A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using DeGroot's method // J. Amer. Statist. Assoc. — 1981. — Vol. 76. — P. 415—418.
17. *Friedkin N.E.* A Formal Theory of Social Power // Journal of Mathematical Sociology. — 1986. — Vol. 12. — P. 103—126.
18. *Gilardoni G.L., Clayton. M.K.* On reaching a consensus using DeGroot's iterative pooling // Ann. Statist. — 1993. — Vol. 21. — P. 391—401.
19. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // Управление большими системами. — 2010. — Вып. 30. — № 1. — С. 470—505.
20. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 12. — С. 38—59.
21. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1. — М.: МЦНМО, 2004. — 520 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Федянин Денис Николаевич — инженер,
☎ (495) 334-89-10, ✉ dfedyanin@inbox.ru,

Чхартишвили Александр Гедеванович — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-89-10, ✉ sandro_ch@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.